СБОРНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ДЛЯ КЛАССОВЪ 5-го, 6-го, 7-го и 8-го ГИМНАЗІЙ

и

соотвѣтствующихъ классовъ другихъ учебныхъ заведеній.

СОСТАВИЛИ

Н. А. Шапошниковъ и Н. К. Вальцовъ.

Шестнадцатое изданіе,

перепечатанное безъ измѣненій.

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА
В. В. ДУМНОВА,
подъ фирмою
„Наслѣдники БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ“.

Цѣна 70 коп.

МОСКВА.
Типографія Императорскаго Московскаго Университета.
1910.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран

ОТДѢЛЕНІЕ VII. Возведеніе въ степень. Извлеченіе корня.

ОТДѢЛЕНІЕ VIII. Ирраціональныя выраженія.

ОТДѢЛЕНІЕ IX. Уравненія второй степени.

ОТДѢЛЕНІЕ X. Уравненія высшихъ степеней

ОТДѢЛЕНІЕ XI. Неопредѣленный анализъ. Изслѣдован[illegible] [illegible]

ОТДѢЛЕНІЕ XII. Прогрессіи.

ОТДѢЛЕНІЕ XIII. Логариѳмы и ихъ примѣненіе.

ОТДѢЛЕНІЕ XIV. Дополнительныя статьи.

ОБЩІЙ ОТДѢЛЪ.

ОТДѢЛЕНІЕ VII.

ВОЗВЕДЕНІЕ ВЪ СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНІЕ КОРНЯ.

§ 1. Возведеніе одночленовъ въ степень.

Въ формулѣ $a^n=b$ количество a называется основаніемъ степени. n—показателемъ степени, а b или равное ему a^n—n-ой степенью отъ a. Составленіе b по даннымъ a и n называется возведеніемъ въ степень.

Если показатель n есть цѣлое положительное количество, то самая степень условно называется цѣлой положительной. Возвести въ цѣлую положительную степень значитъ повторить основаніе множителемъ столько разъ, сколько есть единицъ въ показателѣ.

Такимъ образомъ $a^3=a.a.a$, вообще $a^n=a.a....a$ (n разъ).

Правило знаковъ. Четная степень всякаго количества, положительнаго или отрицательнаго, всегда положительна; такъ $(\pm a)^{2n}=+a^{2n}$. Нечетная степень всякаго количества, положительнаго или отрицательнаго, имѣетъ тотъ же знакъ, какъ основаніе; такъ $(+a)^{2n+1}=+a^{2n+1}$, $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.

Теорема 1. Степень произведенія равна произведенію степеней каждаго изъ сомножителей; такъ $(ab)^n=a^nb^n$.

Теорема 2. Степень дроби равна степени числителя, раздѣленной на степень знаменателя; такъ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Теорема 3. Степень отъ степени получается черезъ перемноженіе показателей; такъ $(a^m)^n=a^{mn}$.

Общее правило. Чтобы возвести одночленъ въ степень, нужно поставить знакъ по правилу знаковъ, возвести въ требуемую степень каждаго множителя и дѣлителя и расположить результаты множителями или дѣлителями соотвѣтственно тому, какъ располагались множители и дѣлители даннаго одночлена.

При этомъ явно выраженныя числа возводятся непосредственно къ буквеннымъ выраженіямъ примѣняется третья теорема.

Напр., имѣемъ $\left(\frac{2a^2b^m}{3a^nd^3}\right)^3=\frac{8a^6b^{3m}}{27a^{3n}d^9}$.

Если показатель есть цѣлое отрицательное количество, то сама степень условно называется цѣлой отрицательной. Всякая степень съ отрицательнымъ показателемъ равняется единицѣ раздѣленной на соотвѣтствующую положительную степень того же основанія. Такимъ образомъ $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$, вообще $a^{\ \ n}=\frac{1}{a^n}$.

Къ отрицательнымъ степенямъ примѣняются безъ измѣненія правило знаковъ, всѣ три теоремы и общее правило возведенія въ степень одночленовъ. Такъ $(\pm a)^{\ 2n}=+a^{\ 2n}$, $(\pm a)^{\ 2n\ \ 1}=\pm a^{-2n-1}$ $(ab)^{-n}=a^{-n}b^{\ \ n}$. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{a^{\ \ n}}{b^{\ \ n}}$, $(a^{-m})^n=a^{-mn}$, $(a^m)^{-n}=a^{-mn}$, $(a^{-m})^{-n}=a^{mn}$

1. $(\pm 2)^4$	1. $(\pm 4)^2$	**2.** $(\pm 5)^3$	2. $(\pm 3)^5$
3. $(\pm 10)^3$	3. $(\pm 10)^4$	**4.** $(\pm 100)^4$	4. $(\pm 100)^3$
5. 2^{-3}	5. $3^{\ \ 2}$	**6.** 5^{-1}	6. 4^{-3}
7. $(-3)^{\ \ 2}$	7. $(-2)^{-3}$	**8.** $(-1)^{-5}$	8. $(-5)^{\ \ 1}$
9. $(\ \ 4)^{\ \ 3}$	9. $(-3)^{-4}$	**10.** $(-6)^{-1}$	10. $(-1)^{-6}$
11. $(\ \ 1)^{2n}$	11. $(-1)^{2n+1}$	**12.** $(-1)^{3n}$	12. $(-1)^{3n+2}$
13. $(2.3)^3$	13. $(4.5)^2$	**14.** $(5.7.3)^3$	14. $(10.4.3)^3$
15. $(ab)^4$	15. $(ac)^5$	**16.** $(\ \ ab)^3$	16. $(-cd)^6$
17. $(xyz)^7$	17. $(xzt)^{10}$	**18.** $(abc)^m$	18. $(bdf)^n$
19. $\left(\frac{a}{b}\right)^3$	19. $\left(\frac{b}{a}\right)^4$	**20.** $\left(\frac{n}{m}\right)^a$	20. $\left(\frac{m}{n}\right)$
21. $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$	21. $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$	**22.** $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3$	22. $\left(-1\frac{1}{4}\right)^4$
23. $(-0,2)^5$	23. $(-0,5)^2$	**24.** $(-0.01)^4$	24. $(-0,001)^3$
25. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\ \ 4}$	25. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	**26.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{\ \ 5}$	26. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\ \ 4}$
27. $(0,3)^{-3}$	27. $(0,2)^{-6}$	**28.** $(0,02)^{\ \ 4}$	28. $(0,05)^{\ \ 3}$
29. $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}$	29. $\left(\frac{1}{a}\right)^{\ \ 4}$	**30.** $\left(\frac{c}{d}\right)^{\ \ 6}$	30. $\left(\frac{d}{c}\right)^{\ \ 5}$
31. $(a^3)^2$	31. $(a^2)^3$	**32.** $(a^3)^4$	32. $(a^4)^5$
33. $(-a^2)^3$	33. $(-a^3)^2$	**34** $(-a^3)^6$	34. $(\ \ a^6)^3$
35. $(-a)^{2n}$	35. $(-a)^{2n\ \ 1}$	**36.** $(\ \ a^5)^{2n\ \ 1}$	36. $(\ \ a^5)^{2n}$
37. $(-a^2)^{-3}$	37. $(\ \ a^3)^{-2}$	**38** $(-a^7)^{\ \ 4}$	38. $(\ \ a^4)^{\ \ 7}$
39 $(-\ a^m)^{\ \ 6}$	39. $(-a^n)^{\ \ 5}$	**40.** $(-a^3)^{\ \ 2n+1}$	40. $(\ \ a^4)^{\ \ 2n+2}$
41. $(a^{\ \ 3})^4$	41. $(a^{\ \ 4})^3$	**42.** $(a^{\ \ 5})^{\ \ 9}$	42. $(a^2\ \ )^{\ \ 5}$

43. $(a^{-m})^{-n}$ 43. $(a^{-m})^{n}$ **44.** $(a^{m})^{-n}$ 44. $(a^{-n})^{-m}$

45. $\left[(-a)^{3}\right]^{4}$ 45. $\left[(-a)^{4}\right]^{3}$ **46.** $\left[(-a)^{5}\right]^{3}$ 46. $\left[(-a)^{3}\right]^{5}$

47. $\left[(-b)^{5}\right]^{m}$ 47. $\left[(-b)^{3}\right]^{n}$ **48.** $\left[(-b)^{5}\right]^{2n}$ 48. $\left[(-b)^{2n}\right]^{7}$

49. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}\right]^{-1}$ 49. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{4}$ **50.** $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^{-2}$ 50. $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{-3}$

51. $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^{3}\right]^{-2}$ 51. $\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^{4}\right]^{-3}$ **52.** $\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^{5}\right]^{-3}$ 52. $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^{4}\right]^{-6}$

53. $\left[(-b)^{\ 3}\right]^{\ 2}$ 53. $\left[(-b)^{\ 4}\right]^{\ 2}$ **54.** $\left[\left(-\frac{1}{b}\right)^{-4}\right]^{-5}$ 54. $\left[\left(-\frac{1}{b}\right)^{-3}\right]^{-6}$

55. $(2a^{3})^{4}$ 55. $(2a^{4})^{3}$ **56.** $(5a^{2}b^{3})^{3}$ 56. $(7a^{3}b^{2})^{3}$

57. $(6a^{m}b^{n})^{3}$ 57. $(4a^{n}b^{m})^{3}$ **58.** $(2a^{5}b^{n})^{m}$ 58. $(3a^{m}b^{4})^{n}$

59. $\left(\frac{2a}{bc}\right)^{4}$ 59. $\left(\frac{3bc}{a}\right)^{3}$ **60.** $\left(\frac{4a^{2}c^{5}}{5b^{3}}\right)^{3}$ 60. $\left(\frac{5a^{4}b}{3c^{2}}\right)^{2}$

61. $(\frac{3}{4}c^{7}d^{2}f)^{4}$ 61. $(\frac{5}{3}c^{6}df^{3})^{3}$

62. $(-0,2a^{p}b)^{5}$ 62. $(-0,3a^{2}b^{p})^{4}$

63. $(-1\frac{3}{4}a^{2m\ \ 1}b)^{3}$ 63. $(-1\frac{1}{2}a^{2}b^{2m+1})^{4}$

64. $(-0,01a^{n\ \ 2}b^{m})^{6}$ 64. $(-0,01a^{2-m}b^{n})^{5}$

65. $\left(\frac{2a^{7}b^{8}}{c^{6}d^{n}}\right)^{5}$ 65. $\left(\frac{a^{10}b^{11}}{3d^{13}f^{m}}\right)^{4}$

66. $\left(\frac{a^{m}b^{n}}{c^{p-1}}\right)^{4}$ 66. $\left(\frac{a^{m\ \ 1}b^{n+1}}{c^{p}}\right)^{5}$

67. $\left(\frac{a^{2n}b^{n+2}}{c^{mn}}\right)^{n}$ 67. $\left(\frac{a^{n-1}b^{1+n}}{c^{m+n}}\right)^{n+1}$

68. $\left(\frac{a^{3m-1}}{b^{3m}}\right)^{3m+1}$ 68. $\left(\frac{a^{n+1}}{b^{n-1}}\right)^{n-1}$

69. $\left(-\frac{a^{m}b^{n+p}}{c^{p}}\right)^{2p}$ 69. $\left(-\frac{a^{m}b^{2p}}{c^{3n}}\right)^{2p+1}$

70. $\left(-\frac{a^{6n+1}}{b^{2n}c^{n+2}}\right)^{6n\ \ 1}$ 70. $\left(-\frac{a^{3n}b^{3m+n}}{c^{2n\ \ 1}}\right)^{4n}$

71. $(2a^{3}b^{\ \ 2}c^{\ \ 1})^{2}$ 71. $(-3a^{2}b^{-1}c^{\ \ 3})^{2}$

72. $(-\frac{2}{3}a^{2}b^{\ \ 1}c^{3}d^{\ \ 2})^{-2}$ 72. $(-1\frac{1}{2}a^{\ \ 3}b^{2}c^{-1}d)^{-2}$

73. $(-0,5a^{\ \ 3}b^{-n}c^{n-1})^{\ \ 1}$ 73. $(-0,4a^{-m}b^{3}c^{3-n})^{-1}$

74. $(-0,04a^{m\ \ 1}b^{3-n}c^{-5})^{-2}$ 74. $(-0,02a^{\ \ 3}b^{n\ \ 1}c^{m-2})^{\ \ 3}$

75. $\left[\left(\frac{a^{2}b^{2}}{c^{3}d^{\ \ 2}f}\right)^{\ \ 1}\right]^{-m}$ 75. $\left[\left(\frac{a^{\ \ 2}b^{-3}}{c^{-1}d^{2}f^{\ \ 1}}\right)^{-m}\right]^{-1}$

76. $\left[\left(\frac{a^{-m}b^{n}}{c^{m\ \ n}}\right)^{-m}\right]^{-n}$ 76. $\left[\left(\frac{a^{n-m}b^{-n}}{c^{m}}\right)^{-n}\right]^{-m}$

77. $\left(\frac{a^3b^{-2}}{3cd^{-3}}\right)^3\cdot\left(\frac{3b^3c^{-2}}{a^5d}\right)^2$

77. $\left(\frac{4a^2b}{c^{-3}d^2}\right)^3\cdot\left(\frac{ac^{-2}}{3b^5}\right)^3$

78. $\left(\frac{a^2bd^2}{4c^2f^3}\right)^3:\left(-\frac{b^3d^3}{2c^3f^2}\right)^3$

78. $\left(\frac{a^4bd^{-3}}{3c^{-1}f^2}\right):\left(-\frac{b^3d^{-2}}{9c^3f}\right)^2$

79. $\left(-\frac{a^2bx^2}{y^3}\right)^{2m-1}\cdot\left(-\frac{y^3}{ab^2x^3}\right)^{2m}$

79. $\left(-\frac{a^3b^2x^{-1}}{y^{-2}}\right)^{2m+1}:\left(-\frac{a^2b^3x^{-1}}{y^{-1}}\right)$

80. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2\cdot\left(-\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{n-1}z^4}\right)^{-3}$

80. $\left(-\frac{6d^{1-n}c^2x^{-1}}{5x^{-3}y^{2-3n}}\right)^{-2}:\left(\frac{4a^{n+3}c^{-x}}{5x^4y^{n+1}}\right)^3$

§ 2. Возведеніе многочленовъ въ степень.

Квадратъ многочлена равенъ алгебраической суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній всѣхъ членовъ попарно взятыхъ. Чтобы составить всѣ подобныя произведенія, достаточно умножать каждый членъ на члены, слѣдующіе за нимъ, и удваивать результаты. Такъ $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

Кубъ многочлена равенъ алгебраической суммѣ кубовъ всѣхъ его членовъ, утроенныхъ произведеній квадрата каждаго члена на каждый изъ остальныхъ и ушестеренныхъ произведеній всѣхъ членовъ по три взятыхъ. Общіе способы для составленія произведеній указываются въ теоріи соединеній. Напр., $(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3b^2a+3b^2c+3b^2d+3c^2a+3c^2b+3c^2d+3d^2a+3d^2b+3d^2c+6abc+6abd+6acd+6bcd$.

Возвести въ степень:

81. $(a-b+c)^2$

81. $(a+b-c)^2$

82. $(a^4+a^2-1)^2$

82. $(a^3-a-1)^2$

83. $(3a^2-2ab-b^2)^2$

83. $(a^2-2ab+3b^2)^2$

84. $(x^4-2ax^3+2a^2x-a^4)^2$

84. $(x^3-3ax^2-6a^2x+a^3)^2$

85. $(3a^{3x}+2a^{2x}+a^x+1)^2$

85. $(a^{3x}-2a^{2x}+3a^x-1)^2$

86. $(a^{2n}+a^n-1-a^{-n})^2$

86. $(a^n+a^{-2n}+a^{-n}+a^{2n})^2$

87. $\left(a^3-\frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2-\frac{1}{8}b^3\right)^2$

87. $\left(a^3-\frac{3}{4}a^2b+\frac{3}{8}ab^3+\frac{1}{2}b^3\right)^2$

88. $\left(x^n-\frac{1}{2}x^3+2\frac{1}{2}x^{-3}+\frac{4}{3}x^{-n}\right)^2$

88. $\left(-x^{2n}+x^{-2n}-\frac{1}{5}x^2+3\frac{1}{2}x^{-2}\right)^2$

89. $(a^4-2a^3+3a^2-2a+1)^2$

89. $(a^8-4a^6-6a^4+4a^2-1)^2$

90. $(a^x+2a^{x-1}-a^{x-2}-4a^{x-3}-5)^2$

90. $(a^{x+3}-2a^{x+2}-a^{x+1}-3a^x-7)^2$

91. $(a+b+c)^3$

91. $(a-b+c)^3$

92. $(1-x+x^2)^3$

92. $(1+2x-x^2)^3$

93. $(a^2-3a-1)^3$

93. $(3a^2-2a+1)^3$

94. $(2a^2+ab-3b^2)^3$ 94. $(a^2+3ab+2b^2)^3$

95. $\left(x^2+2-\frac{3}{x}\right)^3$ 95. $\left(x-3-\frac{2}{x^2}\right)^3$

96. $\left(a^3b^2-\frac{4a^2}{b}-\frac{b}{2a^2}\right)^3$ 96. $\left(-ab^2+\frac{3}{b^2}-\frac{2}{3a}\right)^3$

97. $[(a-1)^2]^2$ 97. $[(1-b)^2]^2$ **98.** $[(2a-1)^3]^2$ 98. $[(3a+1)^3]^2$

99. $(a+2)^6$ 99. $(a-2)^6$ **100.** $(2a-3b)^6$ 100. $(3a+2b)^6$

101. $(a+b+c+d)^3$ 101. $(a-b+c-d)^3$

102. $(x^3+x^2-x-1)^3$ 102. $(x^5+x^3+x+1)^3$

Доказать справедливость тождествъ:

103. $(x+y+z)^2+(x-y-z)^2+(2z-y)^2=2x^2+3y^2+6z^2$

103. $(x-y+z)^2+(x+y-z)^2-(2y-z)^2=2x^2-2y^2+z^2$

104. $(a+b+c+d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-2c)^2+(2b-d)^2=$
$=3(a^2+d^2)+6(b^2+c^2)$

104. $(a-b-c-d)^2+(a+b-c+d)^2+(2a+c)^2+(b-2d)^2=$
$=6(a^2+d^2)+3(b^2+c^2)$

105. $(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)-(am+bn+cp)^2=(an-bm)^2+$
$+(ap-cm)^2+(bp-cn)^2$

105. $(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)-(am-bn-cp)^2=(an+bm)^2+$
$+(ap+cm)^2+(bp-cn)^2$

106. $(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz=x^3+y^3+z^3$

106. $(x-y+z)^3-3(x-y)(z-y)(x+z)=x^3-y^3+z^3$

107. $(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2=4(a^2+b^2+c^2)$

107. $(a-b-c)^2+(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(a+b+c)^2=4(a^2+b^2+c^2)$

108. $(a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3=24abc$

108. $(a+b+c)^3+(a-b-c)^3+(c-a-b)^3+(b-a-c)^3=24abc$

109. Доказать, что если положимъ $A=a+b+c+d$, $B=a+b-c-d$, $C=a-b+c-d$, $D=a-b-c+d$ и кромѣ того примемъ $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$, то будемъ имѣть равенство $AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$.

109. Доказать, что если положимъ $A=a+b+c-d$, $B=a+b-c+d$, $C=a-b+c+d$, $D=b+c+d-a$ и кромѣ того примемъ $ab(a^2+b^2)=-cd(c^2+d^2)$, то будемъ имѣть равенство $AB(A^2+B^2)=-CD(C^2+D^2)$.

110. Доказать, что если положимъ $a+b+c=-p_1$, $ab+ac+bc=p_2$ и $abc=-p_3$ и еще $a^2+b^2+c^2=s_2$, $a^3+b^3+c^3=s_3$, то имѣемъ равенство $s_3+p_1s_2-p_1p_2-3p_3$.

110. Доказать, что при тѣхъ же обозначеніяхъ и еще при условіи $a^4+b^4+c^4=s_4$ имѣемъ равенство $s_2{}^2-s_4=2(p_2{}^2-2p_1p_3)$.

§ 3. Извлеченіе корня изъ одночленовъ.

Формула $\sqrt[n]{a}=x$ показываетъ, что $x^n=a$. Въ этой формулѣ количество a называется подкореннымъ, n—показателемъ корня, а x или равное ему $\sqrt[n]{a}$—корнемъ n-й степени изъ a. Отысканіе x по даннымъ a и n называется извлеченіемъ корня.

Извлечь корень данной степени значитъ найти такое количество, которое, будучи возведено въ данную степень, составило бы подкоренное количество. Такимъ образомъ $\sqrt[3]{a^3}=a$, потому что $(a)^3=a^3$, вообще $\sqrt[n]{a^n}=a$, потому что $(a)^n=a^n$.

Правило знаковъ. Корень четной степени изъ положительнаго количества имѣетъ два знака, положительный и отрицательный; такъ $\sqrt[2n]{+a}=\pm\sqrt[2n]{a}$. Корень четной степени изъ отрицательнаго количества есть мнимое выраженіе; таковъ корень $\sqrt[2n]{-a}$, если само a есть абсолютное число. Корень нечетной степени изъ всякаго количества, положительнаго или отрицательнаго, имѣетъ тотъ же знакъ, какъ подкоренное количество; такъ $\sqrt[2n+1]{+a}=+\sqrt[2n+1]{a}$, $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$.

Теорема 1. Корень изъ произведенія равенъ произведенію корней изъ каждаго множителя; такъ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$.

Теорема 2. Корень изъ дроби равенъ корню изъ числителя, раздѣленному на корень изъ знаменателя; такъ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Теорема 3. Корень изъ степени получается черезъ дѣленіе показателя степени на показателя корня; такъ $\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m$.

Общее правило. Чтобы извлечь корень изъ одночлена нужно поставить знакъ по правилу знаковъ; затѣмъ извлечь требуемый корень изъ каждаго множителя и дѣлителя и расположить результаты множителями или дѣлителями соотвѣтственно тому, какъ располагались множители и дѣлители даннаго одночлена.

При этомъ корни изъ числовыхъ коэффиціентовъ извлекаются непосредственно, а къ буквеннымъ выраженіямъ примѣняется третья теорема. Напр., имѣемъ $\sqrt[3]{\frac{27a^6b^3}{64c^{3n}d^{15}}}=\frac{3a^2b}{4c^nd^5}$.

Показатель корня можетъ быть отрицательнымъ количествомъ. Всякій корень съ отрицательнымъ показателемъ равенъ единицѣ, раздѣленной на подобный же корень съ положительнымъ показателемъ. Такъ $\sqrt[-n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Къ корнямъ съ отрицательными показателями примѣняются безъ измѣненія правило знаковъ, всѣ три теоремы и общее правило извлеченія корня изъ одночленовъ.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ найти корни при помощи первой и второй теоремъ:

111. $\sqrt{144}$ 111. $\sqrt{225}$ **112.** $\sqrt{104.26}$ 112. $\sqrt{132.33}$

113. $\sqrt{50.18}$ 113. $\sqrt{35.315}$ **114.** $\sqrt{180.20}$ 114. $\sqrt{72.200}$

115. $\sqrt{\frac{48.3}{125.5}}$ 115. $\sqrt{\frac{63.7}{80.20}}$ **116.** $\sqrt{\frac{847.7}{216.6}}$ 116. $\sqrt{\frac{52.325}{891.99}}$

117. $\sqrt{17^2-8^2}$ 117. $\sqrt{41^2-9^2}$ **118.** $\sqrt{25^2-7^2}$ 118. $\sqrt{61^2-11^2}$

119. $\sqrt{\frac{15^2-1}{\sqrt{50^2-48^2}}}$ 119. $\sqrt{\frac{26^2-1}{\sqrt{5^2-4^2}}}$

120. $\sqrt{\frac{\sqrt{113^2-112^2}}{19^2-11^2}}$ 120. $\sqrt{\frac{5(7^2-3^2)}{\sqrt{82^2-80^2}}}$

Извлечь корень изъ одночленовъ:

121. $\sqrt[6]{2^{12}}$ 121. $\sqrt[4]{3^8}$ **122.** $\sqrt[3]{-a^6}$ 122. $\sqrt[5]{-10^{10}}$

123. $\sqrt[n]{a^{3n}}$ 123. $\sqrt[3n]{a^{6n+9mn}}$ **124.** $\sqrt[n+2]{a^{3n+6}}$ 124. $\sqrt[3+n]{a^{15+5n}}$

125. $\sqrt[3]{8.3^3}$ 125. $\sqrt[5]{32.10^5}$ **126.** $\sqrt[4]{16.81}$ 126. $\sqrt[3]{125.1000}$

127. $\sqrt{\frac{a^4}{9}}$ 127. $\sqrt[3]{-\frac{a^3}{64}}$ **128.** $\sqrt[5]{-\frac{a^{10}}{b^{15}}}$ 128. $\sqrt[7]{\frac{a^{21}}{b^{14}}}$

129. $\sqrt[4]{a^{16}b^8c^4}$ 129. $\sqrt{2^4a^6b^{12}}$ **130.** $\sqrt[3]{-27a^{12}b^3}$ 130. $\sqrt[5]{-32a^5b^{10}}$

131. $\sqrt[3]{27}$ 131. $\sqrt[5]{32}$ **132.** $\sqrt[2]{\frac{4}{9}}$ 132. $\sqrt[-3]{\frac{27}{8}}$

133. $\sqrt[3]{a\ \ ^6}$ 133. $\sqrt[3]{a\ \ ^{12}}$ **134.** $\sqrt[5]{\ \ a^{-20}}$ 134. $\sqrt[7]{-a\ \ ^{14}}$

135. $\sqrt[-5]{-\frac{1}{32}}$ 135. $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$ **136.** $\sqrt[-n]{-\frac{1}{a^{5n}}}$ 136. $\sqrt[n]{-\frac{1}{a^{3n}}}$

137. $\sqrt[4]{16a\ \ ^4b^{12}}$ 137. $\sqrt[6]{64a\ \ ^{12}b^6}$ **138.** $\sqrt[3]{\frac{8}{125}a^{3n}b^{-6}}$ 138. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}a^{-8n}b^4}$

139. $\sqrt{6\frac{1}{4}a^6c^{4m}}$ 139. $\sqrt{1\frac{11}{25}a^4b^{10n}}$ **140.** $\sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{8}b^{16}}$ 140. $\sqrt[3]{\frac{125}{64}a^{6n}c^{15}}$

141. $\sqrt[3]{0{,}027a^{6n-3}b^{18}c^{-6}}$ 141. $\sqrt[4]{0{,}0625a^{4n+8}b^{24}c^{-12}}$

142. $\sqrt[5]{-10^{10}a\ \ ^{20n}b^5\ \ ^{15m}}$ 142. $\sqrt[3]{-64a^{3n-6}b^{-15n}}$

143. $\sqrt{\frac{4\ \ ^1a^4b\ \ ^6}{9\ \ ^1c^8d\ \ ^2}}$ 143. $\sqrt{\frac{8^{-1}a^9b^{-6}}{5\ \ ^3c\ \ ^6d^{12}}}$

144. $\sqrt[3]{\frac{343a^{15}b^{18}}{2^{6}c^{9}d^{3}}}$ 144. $\sqrt[4]{\frac{25^{2}a^{12}b^{20}}{4^{-2}c^{16}d^{-4}}}$

145. $\sqrt[-2]{\frac{a^{2}b^{2n-6}c^{2m}}{4d^{-6}f^{4n+2}}}$ 145. $\sqrt[-3]{\frac{27a^{3}b^{3+6n}c^{-15}}{d^{6}f^{-3n}}}$

146. $\sqrt[3]{-\frac{1000p^{12}q^{6}r^{3n}}{27a^{3m}b^{9}}}$ 146. $\sqrt[-5]{-\frac{243a^{15}b^{-15n}}{0{,}00032p^{10}q^{5n}}}$

147. $\sqrt[9]{2^{36}a^{-40}b^{7}\frac{(a+b)^{27}}{a^{-4}b^{-11}}}$ 147. $\sqrt[3]{\frac{27^{1}a^{19}b^{-10}(a^{2}+b^{2})^{3n}}{8a^{2}b^{-6n+2}}}$

148. $2ab^{2}\sqrt{2a^{3}bc^{2}\sqrt[3]{8a^{3}b^{9}c^{6}}}$ 148. $3a^{2}b^{-1}\sqrt[3]{3a^{5}b^{-18}d^{2}\sqrt[-2]{9a^{4}b^{6}d}}$

149. $\sqrt[-n]{\frac{(3a^{3}b^{-2})^{2n}a^{-(p+n)}b^{(n+np)}c^{n}}{a^{-p}}}$ 149. $\sqrt[1-2n]{-\frac{a^{4n}(b^{2n}1)^{3}c^{-4n+5}}{c(a^{1}c^{-2n})^{2}}}$

150. $3a^{5-n}b^{4n}\sqrt[3]{\frac{27}{64}a^{-15}b^{3n}c^{6}{}^{3n}d^{9}}$ 150. $4a^{3+n}b^{-5n}\sqrt[4]{\frac{256}{625}a^{-32}b^{4n}{}^{8}c^{12n}d^{1}}$

§ 4. Извлеченіе квадратнаго и кубическаго корня изъ многочленовъ.

Правило. Чтобы извлечь квадратный корень изъ многочлена, нужно

Расположить многочленъ по степенямъ главной буквы. Извлечь квадр. корень изъ перваго члена; получится первый членъ корня. Квадратъ найденнаго члена вычесть изъ даннаго многочлена; составится первый остатокъ. Первый членъ этого остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня; въ частномъ получится второй членъ корня. Сумму удвоеннаго перваго члена корня со вторымъ умножить на второй членъ и произведеніе вычесть изъ перваго остатка; составится второй остатокъ. Первый членъ новаго остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня; въ частномъ получится третій членъ корня. Сумму удвоеннаго перваго члена корня, удвоеннаго второго и третьяго умножить на третій членъ и произведеніе вычесть изъ второго остатка; составится третій остатокъ. Такъ продолжать далѣе, пока въ остаткѣ получится нуль (если дѣйствіе возможно).

Найти условія, при которыхъ слѣдующіе многочлены представляютъ полные квадраты:

151. $x^{2}+2ax+b$ 151. $x^{2}+px+q$

152. $a^{2}x^{2}-p^{2}x+q^{2}$ 152. $a^{2}x^{2}-2b^{2}x+c^{2}$

Найти значеніе коэффиціентовъ m и n, при которыхъ слѣдующіе многочлены представляютъ полные квадраты:

153. $4a^{2}+mab+9b^{2}$ 153. $49a^{2}-mab+16b^{2}$

154. $x^{4}-4x^{3}+10x^{2}+mx+n$ 154. $x^{4}+6x^{3}+x^{2}+mx+n$

155. Показать, что многочленъ $x^4+2ax^3+bx^2+2acx+c^2$ представляетъ полный квадратъ при условіи $b=a^2+2c$.

155. Показать, что многочленъ $x^4-2ax^3+bx^2-cx+d^2$ представляетъ полный квадратъ при условіяхъ $c=a(b-a^2)$ и $d=\frac{1}{2}(b-a^2)$

156. Доказать, что произведеніе четырехъ послѣдовательныхъ чиселъ, сложенное съ единицей, есть квадратъ.

156. Доказать, что произведеніе четырехъ послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ, сложенное съ 16, есть квадратъ.

Извлечь квадратный корень изъ многочленовъ:

157. $4a^4+12a^2b+9b^2$

157. $25a^6-20a^3b^2+4b^4$

158. $\frac{9}{16}a^2b^4-\frac{3}{5}a^3b^2+\frac{4}{25}a^4$

158. $\frac{4}{9}a^4b^2+\frac{5}{3}a^2b^3+\frac{25}{16}b^4$

159. $x^{2n-2}y^2+4x^{2n-6}y^4-4x^{2n-4}y^3$

159. $9x^{2n-8}y^4+x^{2n-2}+6x^{2n-5}y^2$

160. $\frac{1}{4}a^{2m}b^{-6}+0{,}09a^{2n}b^6+0{,}3a^{m+n}$

160. $\frac{1}{4}a^{2m}+0{,}49a^{-2m}b^4-0{,}7b^2$

161. $4a^4-4a^3+5a^2-2a+1$

161. $a^4+6a^3+7a^2-6a+1$

162. $1-8a-32a^3+16a^4+24a^2$

162. $6a+9a^4+1+3a^2-18a^3$

163. $25a^2b^2-8ab^3-6a^3b+16b^4+9a^4$

163. $6a^2b^2-40a^3b+b^4+25a^4+8ab^3$

164. $\frac{13}{3}a^2b^2-2a^3b+\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{9}b^4-\frac{4}{3}ab^3$

164. $\frac{2}{3}ab^3-a^3b+\frac{9}{16}a^4-\frac{11}{36}a^2b^2+\frac{1}{4}b^4$

165. $2-2a^{-1}+a^{-4}+a^{-2}+a^2-2a^{-3}$

165. $2a^{-1}+a^4-2a^2-2a+1+a^{-2}$

166. $\frac{4}{5a^3}+\frac{4}{9a^4}+\frac{9}{25a^2}-\frac{8}{5}-\frac{16}{9a}+\frac{16}{9}a^2$

166. $a-\frac{25}{4}-2a^3+\frac{25}{4}a^2+\frac{4}{25}a^4+\frac{25}{16a^2}$

167. $x^6-4x^5-2x^4+22x^3-11x^2-30x+25$

167. $x^6+6x^5+x^4-34x^3-14x^2+40x+25$

168. $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$

168. $x^6-8x^5y+14x^4y^2+16x^3y^3-31x^2y^4-8xy^5+16y^6$

169. $52a^3b^3+9a^6-38a^4b^2-12a^5b+33a^2b^4-56ab^5+16b^6$

169. $5a^4b^2-4a^5b^3+6a^3b^4-2a^3b+4a^6b^4-12a^4b^5+9a^2b^6-6a^2b^3+a^2$

170. $x^4+10+25x^{-4}+16x^{-8}-4x^2-24x^{-6}-20x^{-2}$

170. $x^4-6x^{-2}+x^{-4}+25x^{-8}-4x+2-4x^{-3}+20x^{-5}-10x^{-6}$

211. 1226960784	211. 7923492196
212. 2831729796	212. 1377968641
213. 491971779649	213. 250109011881
214. 1024212817156	214. 903223474932449.

Для извлеченія корня изъ простой дроби нужно извлечь корень отдѣльно изъ числителя и изъ знаменателя, и затѣмъ раздѣлить первый результатъ на второй. Прежде извлеченія слѣдуетъ испытать сократимость дроби.

Чтобы извлечь квадратный корень изъ десятичной дроби, содержащей четное число десятичныхъ знаковъ, нужно извлекать какъ изъ цѣлаго числа и отдѣлить запятой цифры, получаемыя отъ извлеченія корня изъ цѣлаго слагаемаго дроби.

Извлечь корни изъ дробныхъ чиселъ:

215. $\frac{49}{81}$	215. $\frac{25}{64}$	**216.** $2\frac{7}{9}$	216. $5\frac{1}{16}$
217. $\frac{256}{2809}$	217. $\frac{1369}{2025}$	**218.** $\frac{441}{17424}$	218. $\frac{576}{45369}$
219. $552\frac{1}{4}$	219. $3211\frac{1}{9}$	**220.** $10955\frac{1}{9}$	220. $750\frac{19}{25}$
221. $\frac{343}{700}$	221. $\frac{729}{900}$	**222.** $\frac{867}{14283}$	222. $\frac{1805}{31205}$
223. 0,3364	223. 0,4489	**224.** 0,003969	224. 0,002401
225. 0,264196	225. 0,665856	**226.** 0,00008649	226. 0,00005476
227. 2,3716	227. 7,8961	**228.** 15,0544	228. 83,1744

229. 0,0000258064	229. 0,0000165649
230. 40,998409	230. 10,361961.

§ 6. Приближенное извлеченіе квадратныхъ корней.

Вычислить несоизмѣримое число съ точностью до $\frac{1}{k}$ значитъ замѣнить его такимъ соизмѣримымъ числомъ, которое отличается отъ даннаго несоизмѣримаго меньше, чѣмъ на $\frac{1}{k}$.

Дробь $\frac{1}{k}$ называется предѣломъ погрѣшности, потому что неизвѣстная погрѣшность меньше этой дроби.

Чтобы извлечь квадратный корень изъ цѣлаго числа съ точностью до 1, нужно извлекать, какъ обыкновенно, и отбросить получаемый въ концѣ дѣйствія остатокъ.

Вообще, чтобы извлечь квадратный корень съ точностью до $\frac{1}{k}$, нужно умножить подкоренное число на квадратъ знаменателя k, извлечь изъ произведенія корень съ точностью до 1 и раздѣлить полученный результатъ на число k.

Чтобы извлечь съ точностью до 0,1, нужно къ обозначенію окончательнаго остатка приписать справа два нуля и найти, сверхъ получаемыхъ обыкновеннымъ способомъ цифръ корня, еще одну, которую и отдѣлить запятой.

Чтобы извлечь съ точностью до 0,01, нужно, подобно предыдущему, найти два десятичныхъ знака корня и т. д..

Для приближеннаго извлеченія корня изъ дроби. нужно предварительно сдѣлать знаменателя полнымъ квадратомъ.

Если квадратный корень извлекается изъ десятичной дроби съ точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д., то число десятичныхъ знаковъ данной дроби должно быть вдвое больше числа нулей въ обозначеніи знаменателя предѣла погрѣшности.

Корни изъ слѣдующихъ чиселъ извлечь съ точностью до 1:

231. 969	231. 4792	**232**. 7269	232. 8467
233. 53780	233. 69810	**234**. 81300000	234. 49500000

Корни изъ слѣдующихъ чиселъ извлечь съ нижеуказаннымъ предѣломъ погрѣшности:

235. $7\left(\text{до } \frac{1}{5}\right)$	235. $3\left(\text{до } \frac{1}{7}\right)$	**236**. $46\left(\text{до } \frac{1}{4}\right)$	236. $87\left(\text{до } \frac{1}{6}\right)$
237. $568\left(\text{до } \frac{1}{20}\right)$	237. $982\left(\text{до } \frac{1}{30}\right)$	**238**. $213\left(\text{до } \frac{1}{15}\right)$	238. $373\left(\text{до } \frac{1}{25}\right)$
239. $5\left(\text{до } \frac{1}{200}\right)$	239. $7\left(\text{до } \frac{1}{300}\right)$	**240**. $19\left(\text{до } \frac{1}{300}\right)$	240. $91\left(\text{до } \frac{1}{200}\right)$

Корни изъ слѣдующихъ чиселъ извлечь съ однимъ, двумя и тремя десятичными знаками и опредѣлить предѣлы погрѣшности:

241. 3	241. 7	**242**. $\frac{5}{9}$	242. $\frac{11}{4}$
243. $\frac{5}{8}$	243. $\frac{5}{18}$	**244**. $\frac{7}{24}$	244. $\frac{11}{20}$
245. $3\frac{1}{5}$	245. $7\frac{1}{3}$	**246**. $11\frac{4}{7}$	246. $7\frac{1}{5}$
247. $7\frac{1}{12}$	247. $9\frac{1}{8}$	**248**. $11\frac{5}{49}$	248. $13\frac{7}{64}$
249 74,12	249. 83,53	**250**. 9,2647	250. 4,7293
251. 0,4	251. 0,7	**252**. 6,72	252. 9,53

253. 43,356	253. 60,756	**254.** 0,008	254. 0,003
255. 2,05347	255. 5,00759	**256.** 12,5	256. 49,9
257. 64,25	257. 36,81	**258.** 0,625	258. 0,256
259. 0,23567897	259. 0,31567823	**260.** 6,0005781	260. 4,000794

§ 7. Извлеченіе кубическихъ корней.

Таблица кубовъ. $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$.

Правило. Разбиваемъ цифры числа съ правой стороны къ лѣвой на грани по три цифры, въ каждой, при чемъ въ послѣдней грани могутъ оказаться три цифры, двѣ или одна. Извлекаемъ корень изъ числа, обозначеннаго первой гранью; получится первая цифра корня. Кубъ числа, обозначеннаго найденной цифрой. вычитаемъ изъ числа первой грани; къ остатку сносимъ вторую грань; составится первый остатокъ. Въ обозначеніи остатка отдѣляемъ двѣ цифры справа. Число, обозначенное остальными цифрами. дѣлимъ на утроенный квадратъ найденнаго числа корня; получится вторая цифра корня или результатъ большій истиннаго. Для повѣрки найденнаго частнаго приписываемъ цифру его къ обозначенію утроеннаго найденнаго числа корня, умножаемъ результатъ на испытуемое число, прибавляемъ къ произведенію утроенный квадратъ найденнаго числа корня, умноженный на сто, и сумму снова умножаемъ на испытуемое число. Если произведеніе не больше перваго остатка. то цифра корня найдена вѣрно. Полученное указаннымъ рядомъ дѣйствій число вычитаемъ изъ перваго остатка и сносимъ слѣдующую грань; составится второй остатокъ. Поступая съ нимъ подобно тому, какъ съ первымъ остаткомъ, получимъ третью цифру корня и т. д..

Если a обозначаетъ найденное число корня, то остатокъ подкоренного числа, полученный при отысканіи a, всегда будетъ меньше числа $3a^2+3a+1$.

Извлечь кубическій корень изъ чиселъ:

261. 4913	261. 12167	**262.** 32768	262. 91125
263. 21952	263. 4096	**264.** 74088	264. 59319
265. 132651	265. 238328	**266.** 551368	266. 357911
267. 753571	267. 658503	**268.** 884736000	268. 421875000
269. 157464	269. 314432	**270.** 85184000	270. 970299000
271. 3652264	271. 9663597	**272.** 30959144	272. 71473375
273. 8741816	273. 28652616	**274.** 137388096	274. 34645976

275. 539353144 275. 146363183 **276.** 139798359 276. 96071912
277. 622835864 277. 401947272 **278.** 849278123 278. 445943744
279. 134453795867 279. 219365327791
280. 15888972744 280. 34233150223

Для извлеченія корня изъ простой дроби нужно извлечь корень отдѣльно изъ числителя и знаменателя и затѣмъ раздѣлить первый результатъ на второй. Въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ всѣ простыя дроби несократимы.

Чтобы извлечь кубическій корень изъ десятичной дроби, содержащей тройное число десятичныхъ знаковъ, нужно извлекать, какъ изъ цѣлаго числа, и отдѣлить запятой цифры, получаемыя отъ извлеченія корня изъ цѣлаго слагаемаго дроби.

Извлечь корни изъ дробныхъ чиселъ:

281. $\frac{27}{125}$ 281. $\frac{8}{343}$ **282.** $\frac{343}{729}$ 282. $\frac{27}{1000}$
283. $15\frac{5}{8}$ 283. $2\frac{10}{27}$ **284.** $\frac{729}{1000000}$ 284. $\frac{343}{1000000}$
285. $1\frac{1178}{2197}$ 285. $2\frac{1457}{1728}$ **286.** $72\frac{73}{216}$ 286. $287\frac{62}{125}$
287. 0,004096 287. 0,006859 **288.** 68,921 288. 50.653
289. 0,000005832 289. 0.000175616
290. 0,000030664297 290. 0,000055306341

§ 8. Приближенное извлеченіе кубическихъ корней.

Чтобы извлечь кубическій корень изъ цѣлаго числа съ точностью до 1, нужно извлекать. какъ обыкновенно, и отбросить получаемый въ концѣ дѣйствія остатокъ.

Вообще, чтобы извлечь кубическій корень съ точностью до $\frac{1}{k}$ нужно умножить подкоренное число на кубъ знаменателя k, извлечь изъ произведенія корень съ точностью до 1 и раздѣлить полученный результатъ на число k.

Чтобы извлечь съ точностью до 0,1, нужно къ обозначенію окончательнаго остатка приписать справа три нуля и найти, сверхъ получаемыхъ обыкновеннымъ способомъ цифръ корня, еще одну которую и отдѣлить запятой.

Чтобы извлечь съ точностью до 0,01, нужно, подобно предыдущему, найти два десятичныхъ знака корня.

Для приближеннаго извлеченія корня изъ дроби нужно предварительно сдѣлать знаменателя полнымъ кубомъ.

Если кубическій корень извлекается изъ десятичной дроби съ точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д., то число десятичныхъ знаковъ данной дроби должно быть втрое больше числа нулей въ обозначеніи знаменателя предѣла погрѣшности.

Корни изъ слѣдующихъ чиселъ извлечь съ нижеуказаннымъ предѣломъ погрѣшности:

291. $4\left(\text{до } \frac{1}{5}\right)$ 291. $15\left(\text{до } \frac{1}{2}\right)$ **292.** $21\left(\text{до } \frac{1}{6}\right)$ 292. $3\left(\text{до } \frac{1}{7}\right)$

293. $2\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$ 293. $9\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$ **294.** $40\left(\text{до } \frac{1}{25}\right)$ 294. $24\left(\text{до } \frac{1}{30}\right)$

295. $2\frac{1}{4}\left(\text{до } \frac{1}{10}\right)$ 295. $3\frac{1}{8}\left(\text{до } \frac{1}{10}\right)$ **296.** $\frac{25}{9}\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$ 296. $\frac{31}{4}\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$

297. $0{,}215\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$ 297. $0{,}041\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$

298. $0{,}36\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$ 298. $0{,}27\left(\text{до } \frac{1}{100}\right)$

299. $0{,}51364\left(\text{до } \frac{1}{10}\right)$ 299. $0{,}72356\left(\text{до } \frac{1}{10}\right)$

300. $0{,}00956\left(\text{до } \frac{1}{10^3}\right)$ 300. $0{,}00567\left(\text{до } \frac{1}{10^3}\right)$

ОТДѢЛЕНІЕ VIII.

ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ВЫРАЖЕНІЯ.

1. Выводъ изъ-подъ радикала и введеніе подъ радикалъ.

Если подкоренное выраженіе разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ представляетъ полную степень, а другой неполную, то можно извлечь корень изъ перваго множителя и полученное раціональное выраженіе умножить на ирраціональный корень изъ второго множителя. Такое преобразованіе называется **выводомъ изъ-подъ радикала.**

1. $\sqrt{8}$	1. $\sqrt{18}$	**2.** $\sqrt{75}$	2. $\sqrt{28}$
3. $\sqrt[3]{81}$	3. $\sqrt[3]{500}$	**4.** $\sqrt[3]{-108}$	4. $\sqrt[3]{-72}$
5. $\sqrt[4]{48}$	5. $\sqrt[4]{162}$	**6.** $\sqrt[4]{1250}$	6. $\sqrt[4]{112}$
7. $\sqrt[5]{486}$	7. $\sqrt[5]{96}$	**8.** $\sqrt[5]{-224}$	8. $\sqrt[5]{-1215}$
9. $2\sqrt{405}$	9. $3\sqrt[3]{192}$	**10.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{243}$	10. $\frac{5}{2}\sqrt[5]{128}$
11. $\sqrt[4]{a^8c^3}$	11. $\sqrt[6]{a^{12}c^5}$	**12.** $\sqrt[5]{a^{15}b^6}$	12. $\sqrt[3]{a^6b^4}$
13. $\sqrt[3]{x^4y^5}$	13. $\sqrt[3]{x^{10}y^7}$	**14.** $\sqrt[4]{a^5b^6}$	14. $\sqrt[4]{a^{10}b^7}$
15 $\sqrt{4a^4b}$	15. $\sqrt{25a^2b}$	**16.** $\sqrt[3]{64x^6y^4}$	16. $\sqrt[3]{27x^8y^3}$
17. $3\sqrt{80c^4d^2}$	17. $2\sqrt{75c^6d^4}$	**18** $2\sqrt{\frac{a^5}{4}}$	18. $3\sqrt{\frac{a^4}{27}}$
19. $\sqrt[3]{\frac{a^8}{b^9}}$	19. $\sqrt[5]{\frac{a^{14}}{b^{10}}}$	**20.** $\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^{18}}}$	20. $\sqrt[4]{\frac{a^9}{b^{16}}}$
21. $a\sqrt{\frac{0{,}54e}{a^2x^2}}$	21. $a^2\sqrt[3]{\frac{-0{,}54e}{a^6x^6}}$	**22.** $\sqrt[3]{\frac{-0{,}729m}{a^4}}$	22. $\sqrt{\frac{8{,}64m}{a^4}}$

23. $\sqrt{\frac{(a^2-2ab+b^2)y}{25}}$ 23. $\sqrt{\frac{50z}{a^2+2ab+b^2}}$

24. $\sqrt{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}}$ 24. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{a^3}-\frac{1}{a}}$

25. $\sqrt[3]{\frac{(y^2-x^2)^4}{8(x+y)}}$ 25. $\sqrt[5]{\frac{(x^2-y^2)^6}{32(y-x)}}$

26. $a\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^3}{a^6}}$ 26. $\frac{3}{2a}\sqrt{4a^2-\frac{8a^2b^2}{9}}$

27. $\sqrt[m]{2^{m+1}a^{5m}b^{m+n}c^{mp+1}}$ 27. $\sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n}c^{m^2-n^2}}$

28. $x^2y.\sqrt[2r+1]{-x^{2r+2}y^{6r+5}z^2}$ 28. $yz^2.\sqrt[2r]{x^{4r+1}y^{6r+2}z^5}$

29. $\frac{ac}{b}\cdot\sqrt[n]{3^{n+2}a^{n+5}b^{2n-1}c^{1-3n}}$ 29. $\frac{ab^2}{c}\cdot\sqrt[2n-1]{-2^{6n+1}a^{-4n}b^{3-6n}c^{1-2n}}$

30. $5a^{-3}c^2x^3\sqrt[3]{108a^5b^{7n}c^{-4}d^6x^{-8}}$ 30. $3a^2b\sqrt[5]{96a^{13}b^{10}c^{-6}d^{5n-2}}$

Если при корнѣ находится раціональный множитель, то можно подвести его подъ радикалъ, возведя его для этого въ степень указываемую показателемъ корня, и умноживъ результатъ на подкоренное выраженіе. Такое преобразованіе называется **введеніемъ подъ радикалъ.**

31. $2\sqrt{3}$ 31. $3\sqrt{2}$ **32.** $6\sqrt{5}$ 32. $4\sqrt{3}$

33. $3\sqrt[3]{2}$ 33. $2\sqrt[3]{3}$ **34.** $5\sqrt[3]{3}$ 34. $7\sqrt[3]{2}$

35. $2\sqrt[5]{5}$ 35. $3\sqrt[5]{4}$ **36.** $a\sqrt{5}$ 36. $5\sqrt{a}$

37. $x\sqrt[4]{2}$ 37. $y\sqrt[6]{5}$ **38.** $5\sqrt[4]{a}$ 38. $a\sqrt[4]{5}$

39. $-m\sqrt[3]{n}$ 39. $-n\sqrt[5]{m^3}$ **40.** $-n^2\sqrt{a}$ 40. $-m\sqrt{a}$

41. $3a\sqrt{ax}$ 41. $a^3\sqrt{2ab}$ **42.** $m^2\sqrt[3]{mn}$ 42. $2n\sqrt[3]{m^2n}$

43. $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ 43. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2}$ **44.** $\frac{x}{y}\sqrt[3]{y^2}$ 44. $\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$

45. $-\frac{a}{b}\sqrt[3]{-\frac{b^4}{a^5}}$ 45. $-\frac{b}{a}\sqrt[5]{-\frac{a^2}{b^3}}$ **46.** $m\sqrt[5]{1-\frac{1}{m^5}}$ 46. $\frac{1}{m}\sqrt[4]{m^5-1}$

47. $(m+n)\sqrt{\frac{1}{m^2-n^2}}$ 47. $\frac{1}{m-n}\sqrt{m^2-n^2}$

48. $2ac^3\sqrt[3]{3abc^2}$ 48. $\frac{4a}{3b}\sqrt[5]{\frac{27b^3}{16a^4}}$

49. $3a^nb.\sqrt[m]{3a^2b}$ 49. $2ab^m.\sqrt[n]{3a^mb^2}$

50. $3a^2c^3\sqrt[4]{2a^nb^{-3}}$ 50. $2a^nb^2\sqrt[3]{5a^{-n}b^3}$

§ 2. Сокращенiе показателей и приведенiе къ общему показателю.

Величина корня не измѣняется, если умножимъ или раздѣлимъ показателя корня и показателя подкоренного выраженiя на одно и то же число. Изъ этой теоремы выводятся два слѣдствiя:

Если показатель корня и показатель подкоренного выраженiя содержатъ общаго множителя, то этого множителя можно сократить.

Если нѣсколько корней имѣютъ различныхъ показателей, то, умножая показателей корня и подкоренныхъ выраженiй соотвѣтственно на одинаковыя числа, можно привести корни къ одному показателю.

Умножить показателя подкоренного выраженiя значитъ то же, что возвести это выраженiе въ соотвѣтствующую множителю степень. Раздѣлить показателя подкоренного выраженiя значитъ то же, что извлечь изъ этого выраженiя соотвѣтствующiй дѣлителю корень.

Сократить показателей корней:

51. $\sqrt[9]{a^6}$ 51. $\sqrt[6]{a^4}$ **52.** $\sqrt[8]{a^{10}b^{12}}$ 52. $\sqrt[10]{a^{15}b^{25}}$

53. $\sqrt[3n]{a^{2n}b^{3n}}$ 53. $\sqrt[5n]{a^{10}b^{5n}}$ **54.** $\sqrt[mn]{a^{m}b^{2m}}$ 54. $\sqrt[mn]{a^{2mn}b^{4n}}$

55. $\sqrt[6]{9a^4b^6}$ 55. $\sqrt[4]{4a^8b^2}$ **56.** $\sqrt[9]{27a^{3m}b^6}$ 56. $\sqrt[12]{64a^9b^{3n}}$

57. $\sqrt[12]{64a^4b^{2n}}$ 57. $\sqrt[18]{81a^{16}b^{4n}}$ **58.** $\sqrt[6n]{\frac{16a^{10}b^{6}}{9c^{18}}}$ 58. $\sqrt[6n]{\frac{27a^{9}b^{12}}{8c^{15}}}$

59. $\sqrt{\frac{1000a^{-6}}{729b^9c^{-3}}}$ 59. $\sqrt[8]{\frac{16a^4b^{12}}{81c^{-6}}}$ **60.** $\sqrt[-4]{a^{-8}b^{10}c^{-2}}$ 60. $\sqrt[-6]{9a^4b^{8}c^4}$

Привести къ общему показателю корни:

61. $\sqrt[6]{a^5}$ и $\sqrt[4]{a^3}$ 61. $\sqrt[9]{a^4}$ и $\sqrt[6]{a^5}$

62. $\sqrt[3]{2a^2}$ и $\sqrt[6]{ab^5}$ 62. $\sqrt{3a}$ и $\sqrt[4]{2b^3}$

63. $\sqrt[3]{2a^2b}$ и $\sqrt[4]{3a^3b}$ 63. $\sqrt[5]{3a^3b^2}$ и $\sqrt[3]{2ab}$

64. $\sqrt{\frac{3a^5}{b^3}}$ и $\sqrt[9]{\frac{10b^2}{a}}$ 64. $\sqrt[8]{\frac{5a}{b^2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{3a^2}{b}}$

65. $\sqrt[m^2]{\frac{3a^2}{bc^3}}$ и $\sqrt[mn]{\frac{2ab^2}{c^3}}$ 65. $\sqrt[mn]{\frac{2b^3}{ac^4}}$ и $\sqrt[n^2]{\frac{3a^3c}{b^2}}$

66. $\sqrt[12]{a^2b^3}$, $\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt[8]{a^3}$ 66. $\sqrt[6]{ab^4}$, $\sqrt[9]{a^4}$ и $\sqrt[12]{b^5}$

67. $\sqrt[6]{a^2b}$, $\sqrt[15]{a^3b^4}$ и $\sqrt[50]{a^{10}b^{20}}$ 67. $\sqrt[8]{a^4b^5}$, $\sqrt[12]{a^7b^3}$ и $\sqrt[15]{a^{10}b^{25}}$

68 $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[5]{\frac{y^3}{z^2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$ 68. $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}}$, $\sqrt[5]{\frac{x}{y^4}}$ и $\sqrt[3]{\frac{y}{z^2}}$

69. $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, $\sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}}$ и $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ 69. $\sqrt[2n]{\frac{a+b}{x}}$, $\sqrt[6]{\frac{a}{x+y}}$ и $\sqrt[3n]{\frac{a}{b}}$

70. $\sqrt[n]{(a+b)^m}$, $\sqrt[n^2]{a^m}$ и $\sqrt[nm]{\frac{a-b}{(a+b)^2}}$ 70. $\sqrt[n]{a-b}$, $\sqrt[n^2+n]{a}$ и $\sqrt[n-1]{b}$

§ 3. Приведеніе корней къ нормальному виду.

Простѣйшей или нормальной формой корня считается та, въ которой показатель корня не можетъ быть уменьшенъ сокращеніемъ а подкоренное выраженіе представляетъ или цѣлый одночленъ въ которомъ всѣ множители не допускаютъ извлеченія корня, или цѣлый многочленъ, не допускающій вывода общаго множителя.

Всякій корень можетъ быть приведенъ къ такой нормальной формѣ. Для этого нужно произвести послѣдовательно слѣдующія дѣйствія:

Преобразовать подкоренное выраженіе въ одночленъ, если такое преобразованіе не сдѣлано и возможно.

Сократить показателя корня, если послѣдній имѣетъ общаго множителя съ показателями всѣхъ множителей и дѣлителей подкоренного выраженія.

Выдѣлить изъ-подъ радикала ту часть подкоренного выраженія которая допускаетъ извлеченіе корня.

Уничтожить ирраціональность знаменателя.

Послѣднее преобразованіе состоитъ въ томъ, что умножаютъ числителя и знаменателя подкоренного выраженія на одно и то же выраженіе, выбирая множителя такъ, чтобы знаменатель сдѣлался полной степенью, и затѣмъ извлекаютъ изъ знаменателя корень

Привести къ простѣйшей формѣ слѣдующіе корни:

71. $\frac{3xy^2}{2}\sqrt[3]{\frac{8}{xy}}$ 71. $\frac{2x}{3y^2}\sqrt{\frac{8y^3}{x^5}}$ **72.** $a^2\sqrt{\frac{2ab^3}{3c^2d}}$ 72. $\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}}$

73. $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8-a^6b^2}$ 73. $b\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{a^2}{b^4}}$ **74.** $a^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}-\frac{b}{a^4}}$ 74. $ab\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}-\frac{1}{b^2}}$

75. $5n^x\sqrt[3]{\frac{ab^5}{25n^{3x+1}}}$ 75. $\frac{b^{2x}}{4a^2}\sqrt[5]{\frac{a^8}{64b^{5x+2}}}$ **76.** $\sqrt{\frac{18}{25a}-\frac{9b^2}{25a^3}}$ 76. $\sqrt[3]{\frac{8a^4}{27b^3}+\frac{16a}{27b}}$

77. $\frac{c^{n-m}}{a^m}\sqrt[m+n]{\frac{a^{m^2-n^2}b^{3m+6n}}{c^{m+2n}}}$ 77. $\frac{3}{2a^{m-2}}\sqrt{\frac{16a^{3m-1}}{9b^{3-n}}}$

78. $\frac{a+b}{a}\sqrt[3]{\frac{a^{13}-a^{12}b}{(a-b)^2}}$ 78. $3a^2\sqrt{\frac{\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}}{b^2(a+x)}}$

79. $\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab}{c^2}}$ 79. $\frac{12a}{3a-1}\sqrt{(3a-1)\left(\frac{a}{4}-\frac{1}{12}\right)}$

80. $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}$ 80. $\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}$

§ 4. Подобіе корней.

Когда ирраціональное выраженіе приведено къ простѣйшей формѣ, то раціональный множитель корня называется его коэффиціентомъ.

Корни называются подобными, если они различаются только коэффиціентами, но имѣютъ одинаковыхъ показателей и одинаковыя подкоренныя выраженія. Чтобы судить о томъ, подобны ли данные корни или нѣтъ, нужно привести ихъ къ простѣйшей формѣ.

Доказать подобіе корней:

81. $\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$ 81. $\sqrt{20}$ и $\sqrt{5}$ 82. $\sqrt{63}$ и $\sqrt{28}$ 82. $\sqrt{75}$ и $\sqrt{27}$

83. $\sqrt[3]{54}$ и $2\sqrt[3]{2}$ 83. $\sqrt[3]{72}$ и $\sqrt[3]{243}$ 84. $\sqrt[4]{80}$ и $\sqrt[4]{405}$ 84. $\sqrt[5]{64}$ и $\sqrt[5]{486}$

85. $\sqrt{18}$, $\sqrt{128}$ и $\sqrt{32}$ 85. $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$ и $\sqrt{108}$

86. $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{16}$ и $\sqrt[3]{432}$ 86. $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt[3]{686}$ и $\sqrt[3]{16}$

87. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ и $\sqrt{12}$ 87. $\sqrt{\frac{25}{3}}$ и $\sqrt{75}$ 88. $\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $\sqrt{\frac{2}{45}}$ 88. $\sqrt{\frac{50}{147}}$ и $\sqrt{\frac{2}{363}}$

89. $\frac{1}{4}\sqrt{0,2}$ и $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ 89. $\sqrt[3]{0,01}$ и $\sqrt[3]{80}$

90. $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{9}{8}}$ 90. $\sqrt[3]{10000}$ и $\sqrt[3]{0,27}$

91. $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ и $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$ 91. $\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$ и $\sqrt{\frac{4}{5}-\frac{7}{9}}$

92. $\sqrt[3]{\frac{6}{25}-\frac{1}{4}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{27}-\frac{1}{32}}$ 92. $\sqrt[3]{\frac{12}{125}-\frac{1}{25}}$ и $\sqrt[3]{\frac{39}{64}-\frac{1}{2}}$

93. $\sqrt[6]{a^7b}$ и $\sqrt[6]{a^{13}b^7}$ 93. $\sqrt[3]{27a^4b}$ и $\sqrt[3]{8a^7b^4}$

94. $\sqrt[3]{0,027xy^2}$ и $\sqrt[3]{0,064\frac{x}{y}}$ 94. $\sqrt[3]{0,048a^5x}$ и $\sqrt[3]{-0,75\frac{a^8}{x^2}}$

95. $\sqrt{a-\frac{1}{a^2}}$ и $\sqrt{\frac{a^3-1}{a^4}}$ 95. $\sqrt[3]{a^5-3a^4}$ и $\sqrt[3]{\frac{a-3}{a^2}}$

96. $\sqrt{\frac{1}{b}-a}$ и $\sqrt{\frac{bd^2-ab^2d^2}{c^4}}$ 96. $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}$ и $\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$

97. $\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^3}$, $\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{a-b}}$ и $\sqrt{a^3-a^2b}$

97. $\sqrt{\frac{(a-b)^2}{a+b}}$, $\sqrt{\frac{(a^2-b^2)^3}{a-b}}$ и $\sqrt{\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}}$

98. $\frac{x}{y}\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)}$, $x\sqrt{\frac{z}{xz-yz}}$ и $\sqrt{\frac{4x}{y^2}-\frac{4}{y}}$

98. $\sqrt{9x^3-3x^2y}$, $3x(3x-y)^{-1}\sqrt{\frac{x}{4}-\frac{y}{12}}$ и $6\sqrt{\frac{x}{9z^2}-\frac{y}{27z^2}}$

99. $\sqrt[3]{8a^5-16a^3b^2}$, $ab\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{2b^2}{a^3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{2}{a^3b}-\frac{1}{ab^3}}$

99. $\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4}-\frac{b^5}{a^6}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{b}-\frac{a^2}{b^3}}$ и $-\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^{13}+a^{12}b}{(b-a)^2}}$

100. $\frac{x^2}{y}\sqrt[n]{x^{-3(n-1)}y^{2n+1}}$, $\frac{1}{xy}\sqrt[n]{x^{n+3}y^{n+1}}$ и $(2x-y)\sqrt[n]{x^{3-n}y}$

100. $y\sqrt[n]{x^{n+1}y^{2n+2}}$, $\frac{x^2}{y}\sqrt[n]{\frac{y^{2-n}}{x^{n-1}}}$ и $(x+y)\sqrt[n]{\frac{x^{3n+1}}{y^{n\ 2}}}$

§ 5. Сложеніе и вычитаніе корней.

Для сложенія и вычитанія корней соединяютъ ихъ посредствомъ знаковъ этихъ дѣйствій. Затѣмъ приводятъ корни къ простѣйшей формѣ и, если между корнями окажутся подобные, то дѣлаютъ приведеніе. Это приведеніе состоитъ въ томъ, что коэффиціенты подобныхъ членовъ, взятые со знаками соотвѣтствующихъ членовъ заключаютъ въ скобки, а общій корень выводятъ за скобки множителемъ. Затѣмъ полученный общій коэффиціентъ упрощаютъ по обыкновеннымъ правиламъ.

Произвести сложеніе и вычитаніе корней:

101. $(5\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3})+(3\sqrt{2}+6\sqrt[3]{3})$ 101. $(7\sqrt[3]{4}-2\sqrt{5})-(5\sqrt[3]{4}-4\sqrt{5})$

102. $(10\sqrt[4]{7}+\sqrt[5]{3})-(5\sqrt[5]{3}+2\sqrt[4]{7})$ 102. $(2\sqrt[3]{11}-8\sqrt[5]{7})+(7\sqrt[5]{7}-\sqrt[3]{11})$

103. $(a\sqrt{b}-b\sqrt{c})-(3a\sqrt{b}-5b\sqrt{c})$

103. $(3\sqrt[3]{a}+b\sqrt{c})-(2\sqrt[3]{a}+3b\sqrt{c})$

104. $(a\sqrt[5]{b^4}-2c\sqrt[4]{d})-(-5c\sqrt[4]{d}+3a\sqrt[5]{b^4})$

104. $(2\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[3]{a^2b})+(-\sqrt[4]{a^3}+5\sqrt[3]{a^2b})$

105. $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}$

105. $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{48}-\frac{1}{5}\sqrt{300}$

106. $20\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}-2\frac{1}{2}\sqrt{180}$

106. $\sqrt{275}-10\sqrt{11}-2\sqrt{99}+\sqrt{396}$

107. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}-2\frac{1}{4}\sqrt[3]{40}+10\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{320}$

107. $3\sqrt[5]{2}-\frac{1}{2}\sqrt[5]{64}+10\sqrt[5]{486}-6\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}$

108. $\sqrt{\frac{45}{4}}-\sqrt{20}-5\sqrt{\frac{1}{18}}-\frac{1}{6}\sqrt{245}-\sqrt{\frac{49}{2}}$

108. $2\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{4}{15}}$

109. $3\frac{1}{2}\sqrt{24}-\frac{\sqrt[3]{54}}{4}+2\frac{\sqrt{99}}{3}-1\frac{1}{2}\sqrt{44}+3\sqrt[3]{2}$

109. $\sqrt[3]{54}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{250}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$

110. $5\sqrt{8}-8\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+6\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{13}{9}}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

110. $3\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{108}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+4\sqrt[3]{\frac{1}{72}}$

111. $\sqrt{a^3}+b\sqrt{a}-\sqrt{9a}$

111. $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{\frac{a^5}{8}}-3a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$

112. $\sqrt[3]{27a^4}-3\sqrt[3]{8a}+\sqrt[3]{125a^7}$

112. $\sqrt[5]{a^5b}-\sqrt[5]{32b^6}+3a\sqrt[5]{b}$

113. $3\sqrt{125a^3b^2}+b\sqrt{20a^3}-\sqrt{500a^3b^2}$

113. $2\sqrt[3]{a^6b}-3a^2\sqrt[3]{64b}+2a^2\sqrt[3]{125b^4}$

114. $\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}-\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}$

114. $4ac^2\sqrt[3]{a^5b^7}+b^3\sqrt[3]{a^2b^4c^6}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{8a^2b^{13}c^6}$

115. $5\sqrt[3]{x^2y^5}+4y^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}+\frac{4y}{x^2}\sqrt[3]{-x^8y^2}-6xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}-\frac{3}{2}xy^2\sqrt[3]{-\frac{8}{xy}}$

115. $\sqrt[3]{xy}+6xy\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2}}-4x^2y^2\sqrt[3]{-\frac{1}{x^5y^5}}+\frac{1}{2}y\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}-\frac{3}{2x}\sqrt[3]{-x^4y}$

116. $\sqrt{m^3-m^2n}-\sqrt{(m+n)(m^2-n^2)}-\sqrt{mn^2-n^3}$

116. $\sqrt{9m^2n+9m^3}+5\sqrt{a^2m+a^2n}-3\sqrt{(m+n)^3}$

117. $\sqrt{1-\frac{x}{2}}-3\sqrt{4-2x}-\sqrt{16-8x}+8\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{x}{8}}$

117. $4\sqrt{1+\frac{x}{3}}-6\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{x}{12}}+\frac{1}{3}\sqrt{18+12x}+3\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{x}{27}}$

118. $(a^4-2b^4)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-(a^2+b^2)\sqrt{(a+b)^3(a-b)}+\frac{b^2}{a-b}\sqrt{a^2b^4-b^6}$

118. $\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(a-b)^2}{a+b}}+\frac{1}{2a-3b}\sqrt{(2a-3b)^2(a-b)}-(a-b)\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a-b}}$

119. $\frac{x}{2}\sqrt[4]{(1+2x+x^2)(x+1)(x^2-1)}-\sqrt[4]{x^5(1-x^{-1})}+\frac{1}{2}x^3\sqrt[4]{x^{-3}-x^{-4}}$

119. $\sqrt[4]{(1+x)^3(x^{-4}-x^{-1}+x^{-3}-x^{-2})}-\sqrt[4]{x^{-12}-x^{-10}}+\sqrt[4]{(x^{-3}-x^{-1})x^{-1}}$

120. $\sqrt[3]{8x^9-8x^6y^3}+x\sqrt[3]{x^7y^3-x^6}+\sqrt[3]{1-x^3y^{-3}}+\frac{x^2}{y^2}\sqrt[3]{x^{-3}y^3-x^{-6}y^6}$

120. $\frac{x}{y}\sqrt[3]{y^{-1}-2x^2y^{-3}}+x\sqrt[3]{\frac{2}{xy^3}-\frac{x^{-3}}{y}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x+y}{y}\right)\sqrt[3]{8y^5-16x^2y^3}$

§ 6. Умноженіе и дѣленіе корней.

Для перемноженія корней съ одинаковыми показателями нужно перемножить ихъ подрадикальныя выраженія и надъ выраженіемъ произведенія поставить радикалъ съ тѣмъ же показателемъ. Формула $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.

Для дѣленія корней съ одинаковыми показателями нужно раздѣлить подкоренное выраженіе дѣлимаго на подкоренное выраженіе дѣлителя и надъ выраженіемъ частнаго поставить радикалъ съ тѣмъ же показателемъ. Формула $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$.

Если показатели корней различны, то ихъ сначала приводятъ къ общему показателю, а затѣмъ производятъ умноженіе или дѣленіе по предыдущимъ правиламъ.

Когда корни имѣютъ коэффиціенты, то послѣдніе перемножаютъ или дѣлятъ отдѣльно и результатъ пишутъ передъ полученнымъ общимъ корнемъ.

Произвести умноженіе корней:

121. $\sqrt{3}.\sqrt{27}$

121. $\sqrt{5}.\sqrt{20}$

122. $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{16}$

122. $\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{18}$

123. $3\sqrt[3]{18}.\frac{5}{6}\sqrt[3]{-6}$

123. $2\sqrt[3]{16}.\frac{3}{4}\sqrt[3]{-5}$

124. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}.\frac{1}{9}\sqrt[4]{243}$

124. $\frac{1}{2}\sqrt[6]{32}.\frac{1}{4}\sqrt[6]{128}$

125. $\sqrt[3]{-108}.\sqrt[3]{50}.\sqrt[3]{40}$ 125. $\sqrt[5]{7^3}.\sqrt[5]{-112}.\sqrt[5]{14}$

126. $2\sqrt[4]{32}.\sqrt[4]{216}.3\sqrt[4]{60}$ 126. $\sqrt[6]{1024}.2\sqrt[6]{6561}.\sqrt[6]{1620}$

127. $(4\sqrt{8}+\frac{1}{12}\sqrt{12}-\frac{1}{4}\sqrt{32}).8\sqrt{32}$ 127. $(2\sqrt[3]{135}-5\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{15}).\frac{1}{2}\sqrt[3]{75}$

128. $(\sqrt[3]{9}-7\sqrt[3]{72}+6\sqrt[3]{1125}).4\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ 128. $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{8}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right).3\sqrt{\frac{2}{3}}$

129. $\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}-5\sqrt{30}-2\sqrt{\frac{15}{2}}\right).2\sqrt{\frac{3}{2}}$ 129. $\left(6\sqrt[3]{\frac{9}{4}}-5\sqrt[3]{36}+9\sqrt[3]{\frac{16}{81}}\right).\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

130. $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5}).(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ 130. $(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{4}).(4\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$

131. $(\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{54}).\left(5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

131. $\left(\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{200}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{75}\right).(2\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{15})$

132. $\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right).\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{8}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

132. $\left(5\sqrt[3]{\frac{4}{3}}-3\sqrt[3]{\frac{3}{8}}+4\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right).\left(6\sqrt[3]{\frac{9}{4}}-\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{72}\right)$

133. $\sqrt{a^3b}.\sqrt{a^5b^3}$ 133. $\sqrt[3]{a^2b}.\sqrt[3]{ab^4}$

134. $a^2\sqrt[3]{2x}.\frac{1}{a}\sqrt[3]{4x}$ 134. $\frac{1}{a}\sqrt[4]{4x^2}.a^3\sqrt[4]{8x}$

135. $2\sqrt[3]{25a^5}.3\sqrt[3]{15a^4}$ 135. $5\sqrt[3]{12a^2}.2\sqrt[3]{18a^5}$

136. $3\sqrt{\frac{5a}{b^2}}.2\sqrt{\frac{4b^4}{5a^3}}$ 136. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8a}{3b^2}}.\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3b^3}{2a^3}}$

137. $\frac{x}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}}.\frac{1}{4}a\sqrt[3]{\frac{8a}{x^4}}$ 137. $5\sqrt[3]{\frac{2a^4}{25x^5}}.\sqrt[3]{\frac{4a^5}{5x^2}}$

138. $\frac{12a^3}{5x^2}\sqrt[4]{\frac{a^7x}{32}}.\frac{10x^3}{3a^2}\sqrt[4]{\frac{4}{a^3x}}$ 138. $\frac{x^2}{a^2}\sqrt[3]{\frac{3a}{x^2}}.\frac{1}{a^2x^5}\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^4}}$

139. $a^{-3}b\sqrt[4]{a^3b^2}.2a^2\sqrt[4]{a^{-5}b^3}.\frac{1}{2}ab^{-2}\sqrt[4]{a^{10}b^7}$

139. $a^{-1}b^3\sqrt[5]{a^{-1}b^9}.4a^3b^{-3}\sqrt[5]{a^3b}.\frac{1}{8}a^4b^{-1}\sqrt[5]{b^4a^{-3}}$

140 $\sqrt[3]{\frac{3a^{-2}b^5}{5a^4b^{-2}}}.\sqrt[3]{\left(\frac{6a^{-2}}{5b^3}\right)^{-2}}.\sqrt[3]{-60a^5b^2}$

140 $\sqrt[3]{\left(\frac{2a^{-3}b}{9a^3b^{-1}}\right)^{-2}}.\sqrt[3]{\left(-\frac{3b^{-4}}{4a^{-5}}\right)^{-1}}.\sqrt[3]{72a^4b^6}$

141. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$ 141. $\left(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$

142. $\left(a\sqrt[6]{\frac{a^4}{x^5}}+x\sqrt[6]{a^5x}-\sqrt[6]{\frac{x^4}{a^3}}\right)\cdot\sqrt[6]{\frac{x^3}{a^2}}$ 142. $\left(\sqrt[5]{\frac{a^4}{x}}+\sqrt[5]{\frac{a^3}{x^2}}-\sqrt[5]{\frac{x^4}{a}}\right)\cdot\frac{a^2}{x^2}\sqrt[5]{\frac{x^3}{a^6}}$

143. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$ 143. $\left(a+\frac{2}{a}\sqrt{ab}\right)\left(a-2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

144. $(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}).(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$ 144. $(\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{ab}).\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}\right)$

145. $\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}$ 145. $\sqrt[3]{5}.\sqrt{2}$

146. $\sqrt[5]{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ 146. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

147. $\sqrt[6]{54}.\sqrt{6}.\sqrt[3]{2}$ 147. $\sqrt[3]{2}.\sqrt[6]{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

148. $\sqrt[9]{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[12]{3}$ 148. $\sqrt[7]{12}.\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[14]{6}.\sqrt[6]{3}$

149. $(3\sqrt{10}-2\sqrt[3]{4}+6\sqrt[6]{25}).\sqrt[4]{2}$ 149. $(2\sqrt{6}+3\sqrt[3]{15}-\sqrt[5]{10}).\sqrt[4]{12}$

150. $(2\sqrt[7]{10}+3\sqrt{2}-4\sqrt[3]{5}).\sqrt[4]{10}$ 150. $(2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[4]{2}).3\sqrt[6]{2}$

151. $(3\sqrt{2}+4\sqrt[3]{3}).(\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3})$ 151. $(5\sqrt[4]{3}-2\sqrt[3]{2}).(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})$

152. $(6\sqrt[3]{2}\quad\sqrt[6]{32}).\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)$ 152. $(\sqrt[3]{4}-2\sqrt[4]{8}).\left(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$

153. $\sqrt[4]{a^3b}.\sqrt[6]{ab^4}$ 153. $\sqrt[12]{a^3b^5}.\sqrt[9]{ab^2}$

154. $3a^2b\sqrt{3bc}.5ab\sqrt[3]{2a^2c}$ 154. $8a^2b\sqrt[3]{3ac^2}.2ac^2\sqrt[4]{2b^2c}$

155. $a^2\sqrt[4]{a^5b^2}.b\sqrt[3]{\frac{a^5}{b}}\cdot\sqrt[4]{a^6b^7}.ab\sqrt[3]{a^4b^7}$ 155. $a\sqrt[5]{a^4b^3}.ab^2\sqrt[3]{ab^2}.\sqrt[5]{ab^4}.a\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$

156. $2a\sqrt[4]{a^5b^2}.\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^3}}\cdot3b\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$ 156. $3a^2\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\cdot\sqrt[6]{ab^2}.2b\sqrt[4]{ab^3}.\sqrt{\frac{a}{b}}$

157. $(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[4]{b^2}-a\sqrt[6]{b^5}).a^2\sqrt{ab}$ 157. $(\sqrt[3]{ab^2}-a\sqrt{b}+2\sqrt[6]{b^3}).b\sqrt[3]{ab}$

158. $(\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[3]{a^4}+a\sqrt{a^3}).-2a\sqrt[3]{a^2}$ 158. $(\sqrt{a^3}-2\sqrt[3]{a^5}+a\sqrt[5]{a^4}).-3a\sqrt{a^3}$

159. $\left(a\sqrt[3]{b}-2b\sqrt[6]{\frac{1}{b}}\right).(a\sqrt[6]{b}+\sqrt[3]{b^2})$ 159. $(\sqrt[3]{ab^2}-3b\sqrt{ab})\cdot(2\sqrt{ab}+3b\sqrt[3]{a^2b})$

160. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[4]{a^3}).(\sqrt{a}-\sqrt[12]{a^5})$ 160. $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[5]{a^4}).(\sqrt[3]{a}-\sqrt[15]{a^4})$

Произвести дѣленіе корней:

161. $\sqrt{28}:\sqrt{7}$ 161. $\sqrt{45}:\sqrt{5}$ 162. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ 162. $\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}$

163. $\sqrt{\frac{12}{35}}:\sqrt{\frac{7}{5}}$ 163. $\sqrt{\frac{10}{3}}:\sqrt{\frac{3}{5}}$ 164. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{96}:3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ 164. $2\sqrt[3]{\frac{4}{25}}:\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{12}}$

165. $\left(5\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{10}+15\sqrt[3]{16}\right):3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 165. $\left(3\sqrt[3]{6}+2\sqrt[3]{18}-4\sqrt[3]{12}\right):2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

166. $\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{90}+3\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\right):-2\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ 166. $\left(2\sqrt[3]{20}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right):-3\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$

167. $\sqrt{5a}:\sqrt{a}$ 167. $\sqrt[3]{3a^2}:\sqrt[3]{a}$ **168.** $\sqrt[3]{4a^8}:\sqrt[3]{2a^2}$ 168. $\sqrt{2a^2}:\sqrt{2a}$

169. $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$ 169. $\sqrt[4]{\frac{3a^2}{2}}:\sqrt[4]{\frac{8}{27a^3}}$ **170.** $\sqrt[4]{\frac{8a^5}{3b}}:\sqrt[4]{\frac{6a}{b^3}}$ 170. $\sqrt[4]{\frac{3}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{4b^2}{3a^5}}$

171. $\left(ab^2\sqrt{x}-x\sqrt{b}\right):\sqrt{bx}$ 171. $\left(2ab\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[3]{b}\right):\sqrt[3]{bx}$

172. $\left(\sqrt[4]{a^3x^3}-x\sqrt[4]{a^3}-4a\sqrt[4]{ax^2}\right):\sqrt[4]{ax^3}$ 172. $\left(\sqrt[4]{ax^2}-x^2\sqrt[4]{a^5x}+a\sqrt[4]{x^3}\right):\sqrt[4]{a^3x}$

173. $\left(2\sqrt[4]{x^3y}-3\sqrt[4]{\frac{xy^3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right):\frac{1}{xy}\sqrt[4]{x^3y^2}$

173. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[5]{x^4y}-\frac{6}{5}x\sqrt[5]{\frac{xy^2}{27}}+3\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}\right):\frac{5}{3x^2}\sqrt[5]{x^4y^4}$

174. $\left(\frac{4x}{25}\sqrt[5]{\frac{x^2}{y}}+\frac{3x}{50y}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^4}}-\frac{x}{y}\sqrt[5]{x^4}\right):\frac{4x}{5y}\sqrt[5]{\frac{x^6}{y}}$

174. $\left(\frac{1}{5y^2}\sqrt[5]{x^2}-\frac{27}{xy}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y}}-\frac{y}{x}\sqrt[5]{\frac{x^4}{y^3}}\right):9xy\sqrt[5]{\frac{x}{y^8}}$

175. $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right):\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$

175. $\left(a\sqrt[3]{4a}-2\sqrt[3]{2a^2b^2}\right):\left(\sqrt[3]{2a^2}-\sqrt[3]{4ab}\right)$

176. $\left(\sqrt[3]{a^2b}-2\sqrt[3]{2ab^2}+b\sqrt[3]{4}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2b}\right)$

176. $\left(\sqrt[3]{a^2b}+2\sqrt[3]{ab^2}+b\right):\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$

177. $\left(\sqrt[4]{8a^3}-b\sqrt[4]{27b^2}\right):\left(\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{3b^2}\right)$ 177. $\left(a\sqrt[4]{27a^2}+\sqrt[4]{8b^3}\right):\left(\sqrt[4]{3a^2}+\sqrt[4]{2b}\right)$

178. $\left(a^2\sqrt[4]{a}+b^2\sqrt[4]{8b}\right):\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{2b^3}\right)$ 178. $\left(a^2\sqrt[4]{8a}-b^2\sqrt[4]{b}\right):\left(\sqrt[4]{2a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)$

179. $\left(x^2\sqrt[3]{x^2}+xy\sqrt[3]{xy}+y^2\sqrt[3]{y^2}\right):\left(x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}\right)$

179. $\left(x^2\sqrt[3]{x^2}-3xy\sqrt[3]{xy}+y^2\sqrt[3]{y^2}\right):\left(x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2y^2}-y\sqrt[3]{y}\right)$

180. $\left(\frac{1}{y}\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}-xy\sqrt[5]{4xy}+2y\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^2y^2}-\frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{2y^8}{x^2}}\right):\left(\sqrt[5]{\frac{x}{y^4}}+\sqrt[5]{2x^3y^3}-\sqrt[5]{\frac{y^4}{4x}}\right)$

180. $\left(2\sqrt[5]{2x^4y^2}-2x\sqrt[5]{8x^2}+x^2\sqrt[5]{\frac{1}{y^2}}-4y^2\sqrt[5]{\frac{4}{x^2}}\right):\left(\sqrt[5]{8x^2y}-x\sqrt[5]{\frac{1}{y}}-2y\sqrt[5]{\frac{2}{x}}\right)$

181. $\sqrt[3]{9}:\sqrt{3}$ 181. $\sqrt[5]{8}:\sqrt[3]{2}$

182. $\sqrt[5]{\frac{4}{5}}:2\sqrt{\frac{1}{400}}$ 182. $\sqrt{\frac{3}{5}}:\frac{1}{3}\sqrt[6]{3\frac{3}{8}}$

183. $(\sqrt[4]{6}-2\sqrt{3}+\sqrt[3]{6}):\frac{1}{2}\sqrt{6}$ 183. $(3\sqrt{2}-12\sqrt[3]{12}+10\sqrt[4]{2}):\frac{2}{3}\sqrt[4]{2}$

184. $(\sqrt{3}-3\sqrt[3]{6}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{12}):\frac{3}{8}\sqrt[4]{3}$ 184. $(9\sqrt[4]{3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{18}-5\frac{1}{2}\sqrt{3}):\frac{3}{4}\sqrt[6]{6}$

185. $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$ 185. $\sqrt[5]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}$ **186.** $\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt[6]{2a^3}$ 186. $\sqrt[10]{2a^4}:\sqrt[5]{2a^3}$

187. $\sqrt{6a^5}:\sqrt[6]{27a^{-9}}$ 187. $\sqrt[4]{\frac{4}{a^{4}}}:\sqrt[12]{4a^{-8}}$ **188.** $10a\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$ 188. $3a\sqrt[3]{a}:\sqrt[5]{a^4}$

189. $6a^2\sqrt{3a^{-1}b}\cdot 2a^{3}\sqrt[3]{2ab^{-1}}$ 189. $2a^3b\sqrt[3]{a^{-2}b^3}\cdot 6ab^2\sqrt{a^3b^{-7}}$

190. $5x^2y\cdot\sqrt[3]{25xy^4}$ 190. $2x^2y^3\cdot\sqrt[4]{8x^3y^2}$

191. $\frac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}}:\frac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}}$ 191. $\frac{2a^2b}{c}\sqrt[3]{\frac{a^3b^2}{c^4d}}:\frac{4ab^2}{c^3}\sqrt[5]{\frac{a^6d^2}{b^8c^4}}$

192. $(a^2b+ax^2)\sqrt[3n]{\frac{x}{a^{n-1}c^3}}:ax\sqrt[2n]{\frac{x^4}{a^nc^2}}$ 192. $a^3x^5\sqrt[2n]{\frac{x^{2n+1}}{a^{2n}c^4}}:(a^2x+a^3)\sqrt[3n]{\frac{x^4}{a^{3n}c}}$

193. $(x+y):\frac{1}{3}\sqrt{x^2-y^2}$ 193. $(x-y):\frac{1}{2}\sqrt{x^2-y^2}$

194 $(x^2-y^2):\frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{2a}{(x+y)^2}}$ 194. $(x^2-y^2):\frac{x}{2a}\sqrt[5]{\frac{x^2}{(x-y)^3}}$

195. $(\sqrt[4]{8a^6b^9}-ab\sqrt[6]{8a^4b^5}+ab^2\sqrt[4]{2a^4b}):\sqrt[4]{2b}$

195. $(\sqrt[9]{27a^5b^2}-a^2\sqrt[6]{8a^5b^4}-2ab\sqrt[8]{4a^2b^3}):\sqrt[6]{a^2b}$

196. $(\sqrt[9]{a^5b^4}-4a^3b\sqrt[4]{a^3b^2}+\frac{a^3}{b^4}\sqrt{ab}):\frac{a}{b^2}\sqrt[12]{ab^2}$

196. $(a^2b\sqrt[5]{a^2b}+ab\sqrt[4]{a^3b^2}-\frac{a^2}{b}\sqrt[10]{a^4b^3}):\frac{b^2}{a}\sqrt[10]{a^2b}$

197. $(\sqrt[5]{8x^3}-3\sqrt{3}):(\sqrt[5]{2x}-\sqrt{3})$

197. $(\sqrt[5]{27x^3}+2\sqrt{2}):(\sqrt[5]{3x}+\sqrt{2})$

198. $(2a\sqrt[3]{ax^2}-a\sqrt[6]{ax^5}-ax):(\sqrt[3]{a^2x}-\sqrt{ax})$

198. $(x\sqrt[6]{a^5x}+2a\sqrt[6]{ax^5}-3ax):(\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt{ax})$

199. $(x^2\sqrt[4]{27xy^3}+2xy\sqrt{2xy}):(\sqrt[4]{3x^3y}+\sqrt{2xy})$

199. $(y\sqrt{2xy}-xy\sqrt{xy}):(\sqrt[6]{2xy^3}-\sqrt{xy})$

200 $(x^3y^{-3}-x^3-y^3+2xy\sqrt{xy}):(xy^{-1}\sqrt{xy^{-1}}+x\sqrt{x}-y\sqrt{y})$

200. $(x^3y^{-6}\sqrt{xy}-xy-y\sqrt{xy}-2y\sqrt[4]{x^3y}):(xy^{-2}\sqrt[4]{x^3y^{-3}}+\sqrt{xy}+\sqrt[4]{xy^3})$

§ 7. Возведеніе корней въ степень и извлеченіе изъ нихъ корня.

Для возведенія корня въ степень нужно возвести въ эту степень подкоренное выраженіе. Формула $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Предыдущее правило можно выразить такъ: При возведеніи корня въ степень показатель корня остается безъ измѣненія, а показатели подкоренного выраженія умножаются на показателя степени. Если показатель корня и показатель степени имѣютъ общаго множителя, то можно сократить этого множителя.

Если данный корень имѣетъ коэффиціентъ, то послѣдній возводится въ степень отдѣльно и результатъ пишется коэффиціентомъ при степени самаго корня.

Возведеніе многочленныхъ выраженій дѣлается по общимъ правиламъ.

Возвести въ степень:

201. $(\sqrt[4]{a^3})^4$ 201. $(\sqrt[7]{a^4})^7$ **202.** $(\sqrt[3]{a^2})^2$ 202. $(\sqrt[4]{a^3})^3$

203. $(\sqrt[4]{2x^3})^5$ 203. $(\sqrt[3]{4x^2})^2$ **204.** $(-a\sqrt[8]{a^2b^3})^7$ 204. $(-a\sqrt[5]{a^3x})^4$

205. $(a^2x\sqrt[3]{3a^2x})^4$ 205. $(ax^2\sqrt[3]{2ax^2})^2$ **206.** $\left(-2a\sqrt[6]{\frac{3}{a^4}}\right)^4$ 206. $\left(-\frac{3}{a^2}\sqrt[6]{\frac{2}{a^2}}\right)^3$

207. $(\sqrt[5]{(x-y)^2})^4$ 207. $(\sqrt[3]{(x+y)^2})^5$ **208.** $\left(\frac{\sqrt[4]{a^{-3}b^2}}{a^{\ 2}b^3}\right)^{-3}$ 208. $\left(\frac{a^5b^{\ 3}}{\sqrt[5]{a^{-4}b}}\right)^4$

209. $\left(a^{-1}b^2\sqrt[3]{4a^nb^{\ 2}}\right)^2$ 209. $\left(a^2b^{\ 1}\sqrt{2a^{\ 3}b^n}\right)^{-3}$

210. $\left(\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m}\right)^{np}$ 210. $\left(\sqrt[m]{(x^2-y^2)^n}\right)^{mp}$

211. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ 211. $(\sqrt{5}+2)^2$ **212.** $\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)^2$ 212. $\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)^2$

213. $(\sqrt[3]{4}+\sqrt{2})^2$ 213. $(\sqrt[6]{2}-\sqrt{3})^2$ **214.** $(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3$ 214. $(\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3})$

215. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$ 215. $(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10})^2$

216. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2$ 216. $(5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

217. $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$ 217. $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$

218. $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$ 218. $\left(\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}\right)^2$

219. $\left(\frac{b}{4}\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2$ 219. $\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{3}{\sqrt{ab}}\right)^2$

220. $(a\sqrt{a}+a\sqrt{2a})^3$ 220. $(a\sqrt{b}-2a\sqrt{2b})^3$

При извлеченіи корня изъ корня показатель прежняго корня умножается на показателя новаго, а подкоренное выраженіе остается безъ измѣненія.

Предыдущее правило можно выразить такъ: для извлеченія корня изъ корня нужно извлечь его изъ подкоренного выраженія.

Если показатель новаго корня и всѣ показатели подкоренного выраженія имѣютъ общаго множителя, то послѣдняго можно сократить.

Если данный корень имѣетъ коэффиціентъ, то обыкновенно прежде извлеченія новаго корня вводятъ этотъ коэффиціентъ подъ радикалъ.

Извлечь корень:

221. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ 221. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}$ **222.** $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}$ 222. $\sqrt{\sqrt[5]{a^3}}$

223. $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$ 223. $\sqrt[4]{\sqrt{81}}$ **224.** $\sqrt[4]{\sqrt{256a^{10}}}$ 224. $\sqrt[9]{\sqrt[3]{512a^{18}}}$

225. $\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}$ 225. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ **226.** $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}}$ 226. $\sqrt[6]{a^3\sqrt[5]{a^6}}$

227. $\sqrt{\sqrt[4]{a^{10}b^2c^8}}$ 227. $\sqrt[3]{\sqrt[10]{a^{10}b^5c^{15}}}$ **228.** $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}.\sqrt{b}}$ 228. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}.\sqrt{\sqrt[3]{a}}}$

229. $\sqrt{x^3\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$ 229. $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

230. $\sqrt{x\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}}$ 230. $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^3}{x}}}}$

231. $\sqrt[4]{2x\sqrt[3]{2x^2y.3y\sqrt{3xy^3}}}$ 231. $\sqrt[5]{2x^2\sqrt{3xy.2y\sqrt{2x^3y}}}$

232. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}x^4y^2\sqrt{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{4x}}}}$ 232. $\frac{x^2y}{2}\sqrt{\frac{1}{4y^2}\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{x^4}}}$

233. $\sqrt[4]{20736}$ 233. $\sqrt[6]{117649}$ **234.** $\sqrt[10]{59049}$ 234. $\sqrt[15]{32768}$

235. $\sqrt[12]{4096}$ 235. $\sqrt[8]{6561}$ **236.** $\sqrt[9]{262144}$ 236. $\sqrt[6]{1771561}$

237. $\sqrt[4]{a^4+4a^3+6a^2+4a+1}$

237. $\sqrt[4]{a^4-4a^3+6a^2-4a+1}$

238. $\sqrt[4]{16a^4 \quad 48a^3b+54a^2b^2-27ab^3+\frac{81}{16}b^4}$

238. $\sqrt{\frac{16}{81}a^4+\frac{32}{9}a^3b+24a^2b^2+72ab^3+81b^4}$

239. $\sqrt[6]{x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6}$

239. $\sqrt[6]{x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6}$

240. $\sqrt[6]{64x^{12}-96x^{10}+160x^8-20x^6+\frac{15}{4}x^4 \quad \frac{3}{8}x^2+\frac{1}{64}}$

240. $\sqrt[6]{729x^{12}-486x^{10}+135x^8-20x^6+\frac{5}{3}x^4-\frac{2}{27}x^2+\frac{1}{729}}$

§ 8. Уничтоженіе ирраціональности въ знаменателѣ

Для уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ дроби нужно подыскать простѣйшее изъ выраженій, которыя въ произведеніи съ знаменателемъ даютъ раціональное выраженіе, и умножить на подысканнаго множителя оба члена данной дроби. Въ болѣе сложныхъ случаяхъ уничтожаютъ ирраціональность не сразу, а въ нѣсколько пріемовъ, послѣдовательно вводя множителей въ члены дроби.

Уничтожить ирраціональность:

241. $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 241. $\frac{b^2}{\sqrt{b}}$ **242.** $\frac{m}{\sqrt{m^3}}$ 242. $\frac{n}{\sqrt{n^3}}$

243. $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$ 243. $\frac{a}{\sqrt[5]{a^2}}$ **244.** $\frac{m+n}{\sqrt{m-n}}$ 244. $\frac{m-n}{\sqrt{m+n}}$

245. $\frac{4}{\sqrt{2}}$ 245. $\frac{15}{\sqrt{5}}$ **246.** $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$ 246. $\frac{4}{\sqrt[3]{24}}$

247. $\frac{6}{\sqrt[4]{8}}$ 247. $\frac{6}{\sqrt[4]{12}}$ **248.** $\frac{\sqrt[6]{49}}{\sqrt[3]{21}}$ 248. $\frac{\sqrt[8]{36}}{\sqrt[4]{12}}$

249. $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{a-b}}$ 249 $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$ **250.** $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}$ 250. $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}$

251. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 251. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{q}-\sqrt{b}}$ **252.** $\frac{a}{1-\sqrt{a}}$ 252. $\frac{a}{\sqrt{a}+1}$

253. $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ 253. $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ **254.** $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 254. $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

255. $\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}$ 255. $\frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}$ **256.** $\frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ 256. $\frac{n}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

257. $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 257. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

258. $\frac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$ 258. $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

259. $\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ 259. $\frac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

260. $\frac{n}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$ 260. $\frac{n}{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}}$

§ 9. Извлеченіе корня изъ ирраціональныхъ двучленовъ и многочленовъ.

Квадратный корень изъ выраженія вида $a\pm\sqrt{b}$ извлекается при условіи, что a^2-b есть полный квадратъ. Если положимъ $\sqrt{a^2-b}=n$ то справедлива формула $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+n}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-n}{2}}$. Если при корнѣ $\sqrt{b}$ есть коэффиціентъ, то для примѣненія предыдущей формулы его слѣдуетъ ввести подъ радикалъ.

Извлечь корень изъ двучленовъ:

261. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 261. $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ **262.** $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ 262. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

263. $\sqrt{5-\sqrt{21}}$ 263. $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ **264.** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 264. $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$

265. $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$ 265. $\sqrt{5\sqrt{5}-2\sqrt{30}}$

266 $\sqrt{4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}$ 266. $\sqrt{3\sqrt{7}+2\sqrt{14}}$

267. $\sqrt{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}$ 267. $\sqrt{\sqrt{124-32\sqrt{15}}}$

268. $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ 268. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$

269. $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 269. $\sqrt{ab+2b\sqrt{ab-b^2}}$

270. $\sqrt{2a^2+2\sqrt{a^4-b^2}}$ 270. $\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2b-b^2}}$

Извлечь квадратный и кубическій корень изъ многочленовъ:

271. $\sqrt{(4a+5b-4\sqrt{5ab})}$ 271. $\sqrt{(a+6\sqrt[4]{a^2b}+9\sqrt{b})}$

272. $\sqrt{(a^3+2ab\sqrt{ab}+b^3)}$ 272. $\sqrt{(2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2})}$

273. $\sqrt{(25-10\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})}$ 273. $\sqrt{(9+6\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})}$

274. $\sqrt{\left(4\sqrt[3]{9}+2\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}\right)}$ 274. $\sqrt{\left(8\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}-4\sqrt[12]{32}\right)}$

275. $\sqrt{\left(a^2+a\sqrt{a}-\frac{13}{12}a-\frac{2}{3}\sqrt{a}+\frac{4}{9}\right)}$ 275. $\sqrt{\left(\frac{9a}{4}-12\sqrt{a}+34-\frac{48}{\sqrt{a}}+\frac{36}{a}\right)}$

276. $\sqrt{(4x\sqrt[3]{x}-4x\sqrt[3]{x^2y}+x^2\sqrt[3]{y^2}+y^4-4y^2\sqrt[3]{x^2}+2xy^2\sqrt[3]{y})}$

276. $\sqrt{\left(9x+y\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x^5y^3}+\frac{1}{9y^2}-\frac{2}{y}\sqrt{x}-\frac{2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{y}}\right)}$

277. $\sqrt{(a+\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b)}$ 277. $\sqrt[3]{(a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b)}$

278. $\sqrt[3]{\left(2x\sqrt{2x}-6x\sqrt[3]{y^2}+3y\sqrt[6]{8x^3y^2}-y^2\right)}$

278. $\sqrt[3]{\left(2x\sqrt{2x}+6x\sqrt[3]{y^2}+3y\sqrt[6]{8x^3y^2}+y^2\right)}$

279. $\sqrt[3]{\left(ab^2\sqrt{a}+6ab^2\sqrt[12]{a^3b^4}+12ab^2\sqrt[3]{b^2}+8b^3\sqrt[4]{a^3}\right)}$

279. $\sqrt[3]{\left(8a^3b-6a^2b\sqrt[12]{a^8b^5}+\frac{3}{2}a^2b\sqrt[6]{a^2b^5}-\frac{1}{8}a^2b^2\sqrt[4]{b}\right)}$

280. $\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y^2}\sqrt{x}-\frac{2}{y}+\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{8y}{27x^3}\right)}$

280. $\sqrt[3]{\left(\frac{y^2}{x^3}-\frac{9y}{2x\sqrt{x}}+\frac{27}{4}-\frac{27x}{8y}\sqrt{x}\right)}$

§ 10. Смѣшанныя преобразованія.

Слѣдующія выраженія преобразовать въ произведенія:

281. $\sqrt{ab}+\sqrt{a}$

282. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}$

283. $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}$

284. $\sqrt{a^2-b^2}+a-b$

285. $a^2-\sqrt[3]{b^2}$

286. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[5]{4}$

287. $\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[4]{a^3}$

288. $a^2+\sqrt{a}-\sqrt[4]{a^3}$

289. $a+b+2\sqrt{ab}$

290. $\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{b}$

291. $a^2-\sqrt[5]{b^4}$

292. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b}$

293. $a^3-\sqrt[5]{b^3}$

294. $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$

295. $a-b$

296. a^2+b

297. $a-\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{a^2b}-b$

298. $ab-a\sqrt{a}-\sqrt{ab}+b\sqrt{b}$

299. $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-2a\sqrt[3]{b}$

300. $a\sqrt{ab}+2a\sqrt[4]{b^3}+b\sqrt{a}$

281. $a-\sqrt{ab}$

282. $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}$

283. $\sqrt{a-b}+\sqrt{a^2-b^2}$

284. $\sqrt{a^2-b^2}-a+b$

285. $\sqrt[3]{a^2}-b^2$

286. $\sqrt[3]{9}-\sqrt[5]{a^4}$

287. $\sqrt[10]{a^7}+\sqrt[5]{a^4}$

288. $a-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[6]{a^5}$

289. $a-2\sqrt{ab}+b$

290. $a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b^2}+2\sqrt[3]{a^2b}$

291. $a^4-\sqrt[3]{b^2}$

292. $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2}$

293. $\sqrt[4]{a^3}-b^3$

294. $a\sqrt[5]{a}+b\sqrt[5]{b}$

295. $a+b$

296. $a-b^2$

297. $a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{a}-a\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{b}$

298. $ab+a\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{ab}$

299. $\sqrt[3]{a^2b^2}+2b\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b^4}$

300. $a\sqrt{b}+b\sqrt{ab}-2b\sqrt[4]{a^3}$

Слѣдующія выраженія преобразовать къ простѣйшему виду:

301. $\frac{3}{5-\sqrt{5}}-\frac{1}{3+\sqrt{5}}$ 301. $\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{3-\sqrt{5}}$

302. $\frac{5}{4-\sqrt{11}}-\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}$ 302. $\frac{9}{5\quad\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

303. $a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

303. $(a+b)\sqrt[3]{\frac{a-b}{(a+b)^2}}-\sqrt[3]{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}}$

304. $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$

304. $\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2+x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}-1\right)$

305. $\frac{a(x+a+\sqrt{x^2-a^2})}{x+a-\sqrt{x^2-a^2}}$ 305. $\frac{a(x-a-\sqrt{x^2-a^2})}{x-a+\sqrt{x^2-a^2}}$

306. $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ 306. $\frac{x-\sqrt{x^2-a^2x}}{x+\sqrt{x^2-a^2x}}+\frac{x+\sqrt{x^2-a^2x}}{x-\sqrt{x^2-a^2x}}$

307. $\sqrt{\frac{a+x^2}{2x}-\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{2x}+\sqrt{a}}$ **307.** $\sqrt{\frac{a+x^2}{2x}+\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+x^2}{2x}-\sqrt{}}$

308. $\sqrt{\frac{3x+a^3}{2a}+\sqrt{3ax}}-\sqrt{\frac{3x+a^3}{2a}-\sqrt{3ax}}$

308. $\sqrt{\frac{3x+a^3}{2a}+\sqrt{3ax}}+\sqrt{\frac{3x+a^3}{2a}-\sqrt{3ax}}$

309. $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{5}}-\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}-3}\right).\sqrt[3]{9-\sqrt{5}}$

309. $\left(\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}}-\sqrt[3]{3\sqrt{5}-8}\right).\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}\sqrt{5}}$

310. $\left(\sqrt[6]{9-4\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\cdot\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}$

310. $\left(\sqrt[6]{28+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{27}+\frac{\sqrt{3}}{9}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}}$

311. $5a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}-2\sqrt{a^3\sqrt[4]{a^3}}+3^{-2}\sqrt{a^5\sqrt[4]{a^5}}-4a^2\sqrt[-4]{a\sqrt{\frac{1}{a}}}$

311. $a\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}+3a^3\sqrt{a^{-3}\sqrt{a}}-2a\sqrt[-3]{a^{-2}\sqrt[4]{\frac{1}{a}}}+4a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$

312. $\left(-4a\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{ax}}\right)^{3}+\left(-10a\sqrt{x}.\sqrt[4]{\frac{1}{ax}}\right)^{2}-\left[5\left(\sqrt[3]{a\sqrt[-4]{\frac{a}{x}}}\right)^{3}\right]$

312. $\left(-2a\sqrt[4]{a^{-1}\sqrt[3]{a^{2}}}\right)^{3}+\left[-4a\left(\sqrt[3]{a\sqrt[8]{a^{-5}}}\right)^{3}\right]^{2}-3a^{7}\left(\sqrt[3]{a^{-5}\sqrt[4]{a}}\right)^{3}$

313. $\left\{\sqrt[12]{\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^{3}\right]^{-4}}\cdot\sqrt[5]{\frac{a^{2}}{b^{3}}}:\sqrt[3]{\frac{a^{3}}{b^{2}}}\right\}^{6}$

313. $\left\{\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^{-2}}:\sqrt[3]{b^{-1}}\right)^{5}\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{2}b}}\right)^{6}}\right\}^{2}$

314. $\left[\left(x\sqrt{\frac{a}{b^{2}x}}-\frac{x}{\sqrt{bx}}\right):\frac{\sqrt{x}}{b}-\sqrt{a}\right]:\sqrt[n]{\frac{1}{b^{-m}}}$

314. $\left[\sqrt{b}-\left(\frac{a}{x}\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{a}{\sqrt{ax}}\right):\frac{\sqrt{a}}{x}\right]:\sqrt[n]{x^{7}}$

315. $\sqrt[-2]{\frac{1}{4}a^{2}\sqrt{\frac{a}{x}}}\cdot\left[\frac{a}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{x}}:\left(\sqrt[3]{\frac{a^{2}}{x}}.a^{-1}\sqrt{x}\right)^{6}\right]$

315. $\frac{a}{2\sqrt{x}}:\left[\frac{\sqrt{x}}{a}:\left(a\sqrt{x}\sqrt[3]{\frac{x}{a^{2}}}\cdot\sqrt[-3]{\frac{1}{8}x^{2}\sqrt{\frac{x}{a}}}\right)\right]^{2}$

316. $\left[\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}}.\sqrt[3]{\frac{3a^{2}}{4-8a+4a^{2}}}\right]^{1}:\sqrt[-3]{\frac{3a\sqrt{a}}{2\sqrt{1-a^{2}}}}$

316. $\left[\sqrt[3]{\frac{3a^{2}}{4-8a+4a^{2}}}.\sqrt{\frac{(a-1)\sqrt[3]{1+a}}{\sqrt[3]{a}}}\right]^{-1}:\sqrt[3]{\frac{3}{2\sqrt{a}\sqrt{a^{2}-1}}}$

317. $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}-\sqrt{27+8\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}}$

317. $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

318. $\sqrt{6+2\sqrt{2}.\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}}}$

318. $\sqrt{8-2\sqrt{3}+2\sqrt{2\sqrt{21}+\sqrt{52+\sqrt{2304}}}}$

Опредѣлить частныя значенія выраженій:

319. $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ при $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

319. $\frac{x+1}{x+\sqrt{x^{2}+x}}+\frac{x-1}{x-\sqrt{x^{2}-x}}$ при $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

320. $\frac{2a\sqrt{1+x^{2}}}{x+\sqrt{1+x^{2}}}$ при $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

320. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$ при $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$

§ 11. Степени и корни съ дробными показателями.

Количество съ дробнымъ показателемъ представляетъ корень, показатель котораго равенъ знаменителю дроби, изъ того же количества, возведеннаго въ степень, указываемую числителемъ дроби. Такъ $a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}$, вообще $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Корень съ дробнымъ показателемъ равенъ степени, которой показатель обратенъ показателю корня. Такъ $\sqrt[\frac{3}{2}]{a}=a^{\frac{2}{3}}$, вообще $\sqrt[\frac{m}{n}]{a}=a^{\frac{n}{m}}$.

Дѣйствія со степенями и корнями, имѣющими дробныхъ показателей, производятся по тѣмъ же правиламъ, какія извѣстны для степеней и корней съ цѣлыми показателями. Въ окончательныхъ результатахъ нужно исключать дробныхъ показателей, потому что они вводятся только для облегченія вычисленій и ради обобщенія понятія о показателѣ.

Замѣнить радикалы дробными показателями:

321. $\sqrt[3]{a^2}$ 321. $\sqrt[5]{a^3}$ **322.** $\sqrt[4]{a^{-3}}$ 322. $\sqrt[3]{a^{-2}}$

323. $\sqrt[5]{a^{-3}b^4}$ 323. $\sqrt[4]{a^3b^{-2}}$ **324.** $\sqrt[-2]{a^{-3}}$ 324. $\sqrt[3]{a^{-5}}$

325. $\sqrt{a^2+b^2}$ 325. $\sqrt[3]{a^3-b^3}$ **326.** $\sqrt[-3]{\frac{a^3-b^3}{a^{-1}b^2}}$ 326. $\sqrt[-2]{\frac{a^2b^{-3}}{a^2-b^2}}$

Замѣнить дробные показатели радикалами:

327. $a^{\frac{5}{6}}$ 327. $a^{\frac{2}{3}}$ **328.** $a^{-\frac{3}{4}}$ 328. $a^{-\frac{3}{7}}$

329. $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ 329. $(a-b)^{\frac{5}{8}}$ **330.** $3a^{-\frac{1}{2}}(a-b)^{\frac{3}{8}}$ 330. $4a^{-\frac{2}{3}}(a+b)^{-\frac{1}{2}}$

Упростить числовыя формы:

331. $4^{\frac{1}{2}}$ 331. $27^{\frac{1}{3}}$ **332.** $81^{\frac{3}{4}}$ 332. $16^{\frac{5}{4}}$

333. $16^{-\frac{5}{4}}$ 333. $32^{-\frac{4}{5}}$ **334.** $(-8)^{\frac{2}{3}}$ 334. $(-27)^{\frac{4}{3}}$

335. $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 335. $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ **336.** $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 336. $\left(-1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

337. $(0{,}64)^{0{,}5}$ 337. $(0{,}027)^{\frac{2}{3}}$ **338.** $81^{-0{,}75}$ 338. $1024^{-0{,}6}$

339. $8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}$ 339. $25^{\frac{1}{2}}-27^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{3}{4}}$

340. $16^{0,5}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$ 340. $9^{-0,5}-8^{-1\frac{1}{3}}+(0{,}25)^{-\ldots}$

Произвести показанныя дѣйствія:

341. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{5}}.a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}$ 341. $a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

342. $a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{5}{6}}:a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$ 342. $a^{\frac{11}{15}}b^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{5}{6}}$

343. $(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$ 343. $(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

344. $(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})$

344. $(a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{2}})$

345. $(a^{\frac{2}{3}}-b^{-\frac{5}{4}}):(a^{\frac{2}{9}}-b^{-\frac{5}{12}})$

345. $(a^{\frac{3}{4}}+b^{-\frac{5}{2}}):(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{5}{6}})$

346. $(a^{\frac{3n}{2}}+b^{-\frac{3n}{2}}):(a^{\frac{n}{2}}+b^{-\frac{n}{2}})$ 346. $(a^{\frac{6n}{5}}-b^{\frac{6n}{5}}):(a^{\frac{2n}{5}}-b^{-\frac{2n}{5}})$

347. $(a^{\frac{4}{3}}+4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+16b^{\frac{4}{3}}):(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})$

347. $(3a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{3}}-a^{3}-b^{\frac{10}{3}}):(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{5}{3}})$

348. $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}):(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}})$

348. $(a^{\frac{4}{3}}+b-c^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}):(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{4}})$

349. $(a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}})^{2}$ 349. $(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{5}{4}})^{2}$

350. $(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^{3}$ 350. $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}})^{3}$

351. $\left[\left(a^{-\frac{3}{2}}b\right).\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(a^{\quad 1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{3}$

351. $\left[\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-1}\right)^{2}.\left(a^{2}b^{\quad 1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^{2}$

352. $\sqrt{\frac{3a^{-\frac{7}{2}}b^{8}}{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}\sqrt[4]{4a^{-10}b^{6}\cdot\frac{1}{\left(a^{-\frac{1}{2}}b\right)^{3}}}}$

352. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{a^{\frac{5}{2}}b^{-\frac{6}{5}}}{ab^{-1}}\cdot\left(2a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{5}}\right)^{2}}}$

353. $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$

353. $\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}$

354. $\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}-6a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}}+9b^{\frac{4}{3}}}$

354. $\sqrt{a^{-2\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{9}a^{4}b^{1}}$

355. $\sqrt[-\frac{2}{3}]{a\sqrt{b^{3}}.b^{-2}\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{\frac{1}{3}}b}}$

355. $\sqrt[-\frac{3}{5}]{\sqrt{ab}.a^{-\frac{3}{2}}\sqrt[-\frac{1}{2}]{a^{\frac{2}{3}}b^{-1}}}$

356. $\sqrt[0,4]{\frac{a^{-2}b\sqrt[3]{2a^{6}b^{\ 3}}}{\left(\sqrt{a^{\ 5}b^{3}}\right)^{\frac{4}{15}}}}$

356. $\sqrt[0,6]{\frac{a^{-3}b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3ab^{3}}}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b^{\ 2}}}\right)^{\frac{8}{3}}}$

357. $\left(\sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{\sqrt{a}}{b^{2}}}+\sqrt[\frac{2}{3}]{b\sqrt[3]{a}}\right)^{2}$

357. $\left(\sqrt[\frac{3}{4}]{\frac{b^{3}}{\sqrt{a}}}-\sqrt[\frac{5}{3}]{\frac{a^{5}}{\sqrt[3]{b^{2}}}}\right)^{2}$

358. $\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{4}{3}}+a-2a^{\frac{7}{6}}}$

358. $\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{4}{3}}-2a^{1\frac{5}{12}}}$

359. $(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}):\left(\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^{3}}}}+\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^{3}}}}\right)$

359. $(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}):\left(\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a\sqrt[3]{b^{2}}}{\sqrt{a^{3}}}}-\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{b\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^{3}}}}\right)$

360. $\sqrt[\frac{3}{2}]{a^{2}b\sqrt{b}-6a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{4}}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{\frac{3}{4}}}$

360. $\sqrt[\frac{3}{2}]{8ab^{2}\sqrt[4]{b}-12a^{\frac{4}{3}}b^{2}+6a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{4}}-a^{2}b\sqrt{b}}$

§ 12. Мнимыя количества.

Корни четныхъ степеней изъ отрицательныхъ количествъ представляютъ совершенно особыя алгебраическія количества и называются **мнимыми**. Въ противоположность имъ обыкновенныя количества называются **дѣйствительными**. Въ курсахъ алгебры доказывается, что корень всякой **четной** степени изъ отрицательнаго количества можетъ быть выраженъ черезъ **квадратные** корни изъ отрицательныхъ количествъ. Поэтому за основной видъ мнимаго количества принимается квадратный корень изъ какогс нибудь отрицательнаго количества.

Простѣйшее изъ мнимыхъ количествъ есть $\sqrt{\ \ 1}$. Принято обозначать его буквой i, такъ что $\sqrt{-1}-i$. Возводя это количество въ послѣдовательныя степени, находимъ:

$$(\sqrt{-1})^1=i,\ (\sqrt{-1})^2=-1,\ (\sqrt{-1})^3=\ \ i,\ (\sqrt{-1})^4=1.$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи показателя тѣ же четыре результата повторяются періодически. Вообще оказывается, что всякая степень отъ i съ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ равна степени, которой показатель представляетъ остатокъ отъ дѣленія даннаго показателя на 4. Такъ $i^{26}=i^2=-1$, $i^{35}=i^3=-i$.

Всякое мнимое количество вида $\sqrt{-a}$ можетъ быть представлено въ видѣ произведенія дѣйствительнаго количества на i, именно $\sqrt{-a}=\sqrt{a}.i$.

Подобное выраженіе мнимаго количества называется **нормальной** его формой. Для производства дѣйствій съ мнимыми количествами нужно приводить ихъ сначала въ нормальную форму.

Выраженіе вида $a+bi$, гдѣ a и b суть дѣйствительныя количества, представляетъ самый общій видъ алгебраическаго количества. Оно дѣлается дѣйствительнымъ въ случаѣ $b=0$. Такое количество называется **комплекснымъ** количествомъ или просто **комплексомъ**. Два комплекса вида $a+bi$ и $a-bi$, т.-е. тѣ. которые отличаются только знаками при мнимой части, называются **сопряженными**. Въ теоріи дѣйствій съ комплексными количествами довольно часто встрѣчается число $\sqrt{a^2+b^2}$. Оно называется **модулемъ** комплекса $a+bi$ и обозначается обыкновенно черезъ M.

При производствѣ всякихъ дѣйствій съ комплексами, нужно приводить предварительно мнимыя части ихъ къ нормальному виду.

При сложеніи и вычитаніи комплексовъ отдѣльно складываются или вычитаются ихъ дѣйствительныя части и отдѣльно мнимыя части. Такъ $a+bi\pm(a_1+b_1i)=(a\pm a_1)+(b\pm b_1)i$.

Умноженіе совершается по общимъ правиламъ, при чемъ только принимается во вниманіе, что $i^2=-1$. Поэтому $(a+bi)(a_1+b_1i)=$ $=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=aa_1-bb_1+(a_1b+ab_1)i$.

Дѣленіе выполняется посредствомъ умноженія дѣлимаго и дѣлителя на выраженіе, сопряженное съ дѣлителемъ. Отъ этого новый дѣлитель дѣлается дѣйствительнымъ, именно обращается въ квадратъ модуля прежняго дѣлителя. Такимъ образомъ $(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{a_1^2+b_1^2}=\frac{aa_1+bb_1}{M_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{M_1^2}i$.

Возведеніе въ квадратъ и въ кубъ дѣлается по извѣстнымъ формуламъ. Примѣняя эти формулы, полезно сначала только обозначать степени мнимаго i, а потомъ уже замѣнять ихъ простѣйшими выраженіями. Такимъ образомъ $(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+$ $+b^3i^3=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i$.

Извлеченіе квадратнаго корня дѣлается по формуламъ $\sqrt{a\pm bi}=$ $=\sqrt{\frac{M+a}{2}}\pm\sqrt{\frac{M-a}{2}}i$, гдѣ M обозначаетъ модуль подкоренного комплекса. Полученному корню можно приписать или тѣ знаки его дѣйствительной или мнимой частей, съ какими онѣ являются на этой формулѣ, или знаки противоположные.

361. $(\sqrt{-1})^6$ 361. $(\sqrt{-1})^8$ **362.** $(\sqrt{-1})^{21}$ 362. $(\sqrt{-1})^{14}$

363. $(\sqrt{-1})^7$ 363. $(\sqrt{-1})^{25}$ **364.** $(\sqrt{-1})^{56}$ 364. $(\sqrt{-1})^{98}$

365. i^{40} 365. i^{43} **366.** i^{37} 366. i^{34}

367. i^{18} 367. i^{65} **368.** i^{4n+2} 368. i^{4n-2}

369. i^{4n-1} 369. i^{4n-3} **370.** i^{8n+5} 370. i^{8n-3}

Упростить мнимыя выраженія:

371. $\sqrt{-4}$ 371. $\sqrt{-25}$ **372.** $\sqrt{-81}$ 372. $\sqrt{-36}$

373. $\sqrt{-a^2}$ 373. $\sqrt{-b^4}$ **374.** $\sqrt{-b^6}$ 374. $\sqrt{-a^{10}}$

375. $\sqrt{-\frac{9}{4}}$ 375. $\sqrt{-\frac{16}{81}}$ **376.** $\sqrt{-\frac{a^4}{b^8}}$ 376. $\sqrt{-\frac{b^2}{a^6}}$

377. $\sqrt{-a}$ 377. $\sqrt{-b}$ **378.** $\sqrt{-9x}$ 378. $\sqrt{-4y}$

379. $\sqrt{-a^2-b^2}$ 379. $\sqrt{-(a-b)^2}$

380. $\sqrt{-x^2-y^2+2xy}$ 380. $\sqrt{-x^2-y^2-2xy}$

Произвести показанныя дѣйствія:

381. $\sqrt{-25}+\sqrt{-49}-\sqrt{-64}+\sqrt{-1}$

381. $\sqrt{-144}-\sqrt{-81}-\sqrt{-1}+\sqrt{-9}$

382. $3\sqrt{-4}+5\sqrt{-27}-3\sqrt{-16}-5\sqrt{-3}$

382. $10\sqrt{-25}-5\sqrt{-8}+\sqrt{-49}-2\sqrt{-2}$

383. $3+2i+(4-3i)-\left[(8-5i)-(5+13i)\right]$

383. $45i-3-(7-i)-\left[(16+3i)+(11-2i)\right]$

384. $a+bi-(2a-3bi)+\left[(a-4bi)+(5a-2bi)\right]$

384. $3a-2bi+(a-bi)+\left[(3a-5bi)-(2a-8bi)\right]$

385. $\sqrt{-16}.\sqrt{-9}$ 385. $\sqrt{-8}.\sqrt{-2}$

386. $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$ 386. $\sqrt{-m}.\sqrt{-n}$

387. $i\sqrt{-x^2}$ 387. $-i\sqrt{-y^2}$

388 $\sqrt{a-b}.\sqrt{b-a}$ 388. $-\sqrt{b-a}.\sqrt{a-b}$

389. $(2-5i)(8-3i)$ 389. $(8+3i)(4-5i)$

390. $\left(5+2\sqrt{-7}\right).\left(6-5\sqrt{-7}\right)$ 390. $\left(2-\sqrt{-12}\right).\left(5-\sqrt{-2}\right)$

391. $\left(\sqrt{a}-\sqrt{-b}\right).\left(\sqrt{a}+3\sqrt{-b}\right)$

391. $\left(a+\sqrt{-b}\right).\left(a-2\sqrt{-b}\right)$

392. $\left(3\sqrt{-5}-2\sqrt{-7}\right).\left(2\sqrt{-7}+3\sqrt{-5}\right)$

392. $\left(2\sqrt{-3}+5\sqrt{-2}\right).\left(5\sqrt{-2}-2\sqrt{-3}\right)$

393. $a:\sqrt{-a}$ 393. $ai:\sqrt{-a}$

394. $\sqrt{-ax}:\sqrt{-x}$ 394. $\sqrt{-x^2}:\sqrt{-x}$

395. $\frac{a^2+b^2}{a-bi}$ 395. $\frac{a^2+b^2}{a+bi}$

396. $\frac{x\ \ y}{x+yi}$ 396. $\frac{x-y}{x-yi}$

397. $\frac{4}{1+\sqrt{-3}}$ 397. $\frac{2}{3-\sqrt{-2}}$

398. $\frac{3-5i\sqrt{8}}{3+5i\sqrt{8}}$ 398. $\frac{1-2i\sqrt{12}}{2-3i\sqrt{12}}$

399. $\frac{36-\sqrt{-2}}{2+3i\sqrt{2}}$ 399. $\frac{5-29i\sqrt{5}}{7-3\sqrt{-5}}$

400. $\frac{2-\sqrt{-7}}{3+\sqrt{-21}}$ 400. $\frac{3+\sqrt{-11}}{2-\sqrt{-33}}$

401. $(a+bi)^2$ 401. $(a-bi)^2$

402. $\left(3-\sqrt{-2}\right)^2$ 402. $\left(1+\sqrt{-5}\right)^2$

403. $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$ 403. $\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2$

404. $\left(3\sqrt{-5}+2\sqrt{-1}\right)^2$ 404. $\left(2\sqrt{-5}-3\sqrt{-1}\right)^2$

405. $(2-3\sqrt{-2})^2$

406. $\left(\frac{-1+2\sqrt{-2}}{2}\right)^2$

407. $(a-bi)^3$

408. $(3+\sqrt{-2})^3$

409. $(\sqrt{-3}-2\sqrt{-1})^3$

410. $\left(\frac{-1+\sqrt{\ 3}}{2}\right)^3$

411. $\sqrt{3+4\sqrt{-1}}$

412. $\sqrt{-3-4i}$

413. $\sqrt{1+4\sqrt{-3}}$

414. $\sqrt{2-3\sqrt{-5}}$

415. $\sqrt{20-4\sqrt{-11}}$

416. $\sqrt{6+\sqrt{-13}}$

417. $\sqrt{\sqrt{\ 1}}$

3. $\sqrt[8]{\ 1}$

405. $(3+2\sqrt{-3})^2$

406. $\left(\frac{1-2\sqrt{-2}}{2}\right)^2$

407. $(a+bi)^3$

408. $(2-\sqrt{-3})^3$

409. $(\sqrt{-2}+2\sqrt{-1})^3$

410. $\left(\frac{-1-\sqrt{\ 3}}{2}\right)^3$

411. $\sqrt{8+6\sqrt{-1}}$

412. $\sqrt{5-12i}$

413. $\sqrt{7-4\sqrt{-2}}$

414. $\sqrt{5+5\sqrt{-3}}$

415. $\sqrt{28+4\sqrt{-15}}$

416. $\sqrt{5-\sqrt{-11}}$

417. $\sqrt{-\sqrt{-1}}$

418. $\sqrt[12]{-1}$

419. Показать, что когда n есть кратное 3, то

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n-2.$$

419. Показать, что когда n не дѣлится на 3, то

$$\left(\frac{-1+\sqrt{\ 3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n--1.$$

420. Показать, что когда n дѣлится на 2, то $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ равно или ± 2, или 0.

420. Показать, что когда n не дѣлится на 2, то $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ равно $\pm\sqrt{2}$.

ОТДѢЛЕНІЕ IX.

УРАВНЕНІЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

§ 1. Рѣшеніе числовыхъ уравненій второй степени

Уравненіемъ второй степени или **квадратнымъ** уравненіемъ называется всякое уравненіе, которое посредствомъ преобразованій, замѣняющихъ его другими, совмѣстными съ нимъ уравненіями, можетъ быть приведено къ виду $ax^2+bx+c=0$.

Послѣднее уравненіе называется **общимъ** видомъ квадратныхъ уравненій. Количества a, b и c называются коэффиціентами уравненія. Эти коэффиціенты всегда можно считать цѣлыми количествами. Коэффиціентъ a всегда можно считать положительнымъ. Если случайно коэффиціентъ c равенъ нулю или b равенъ нулю, то получается такъ называемое неполное квадратное уравненіе. Рѣшить квадратное уравненіе значитъ найти тѣ значенія x, которыя обращаютъ данное уравненіе въ тождество. Такихъ значеній или корней всякое квадратное уравненіе имѣетъ два.

Для рѣшенія неполнаго уравненія $ax^2+bx=0$ достаточно вывести въ первой части его за скобки x. Получится $x(ax+b)=0$. Изъ этого видно, что уравненію можно удовлетворить двумя способами: или полагая $x=0$, отчего обращается въ нуль первый множитель первой части уравненія, или полагая $x=-\frac{b}{a}$, отчего обращается въ нуль второй множитель. Въ обоихъ этихъ случаяхъ все произведеніе будетъ равно второй части уравненія, т.-е. равно нулю. и, слѣдовательно, уравненіе будетъ удовлетворено. Итакъ, данное уравненіе имѣетъ два корня $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$.

Примѣръ. Дано $x^2-5x=0$. Отсюда $x(x-5)=0$. Слѣдовательно, $x_1=0$, $x_2=5$.

Разсматривая второе неполное уравненіе $ax^2+c=0$, различимъ два случая, когда коэффиціентъ c отрицателенъ и когда онъ положителенъ. Положимъ, напр., что дано уравненіе $4x^2-7=0$. Раз-

сматривая первую часть, какъ разность квадратовъ, можно разложить ее въ произведеніе. Получимъ $(2x-\sqrt{7})(2x+\sqrt{7})=0$. Но произведеніе можетъ быть равно нулю только тогда, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю. Поэтому данное уравненіе совмѣщаетъ въ себѣ два корня, удовлетворяющіе порознь двумъ уравненіямъ первой степени $2x-\sqrt{7}=0$ и $2x+\sqrt{7}=0$. Значитъ корни его суть $x_1=\frac{\sqrt{7}}{2}$ и $x_2 \quad \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Положимъ теперь, что дано уравненіе $3x^2+10=0$. Первая часть его можетъ быть разложена въ произведеніе посредствомъ мнимыхъ количествъ. Дѣйствительно, такъ какъ $i^2=-1$, то можно написать данное уравненіе въ видѣ $3x^2-10i^2=0$. Послѣ этого разсматривая первую часть, какъ разность квадратовъ, имѣемъ $(\sqrt{3}.x-\sqrt{10}.i)(\sqrt{3}.x+\sqrt{10}\,i)=0$, откуда видно, что данное уравненіе разлагается на два $\sqrt{3}.x-\sqrt{10}.i=0$ и $\sqrt{3}.x+\sqrt{10}.i=0$ и потому имѣетъ два мнимыхъ корня $x_1=\sqrt{\frac{10}{3}}i$ и $x_2=-\sqrt{\frac{10}{3}}i$.

Рѣшить неполныя квадратныя уравненія:

1. $x^2-7x=0$	1. $x^2+3x=0$
2. $4x^2 \quad -9x$	2. $2x^2-13x$
3. $7x^2-8x \quad 5x^2 \quad 13x$	3. $4x^2+15x-9x^2-6x$
4. $5x^2+4x \quad 11x^2-8x$	4. $3x^2+14x-18x-7x^2$
5. $(2x+5)^2-(x-3)^2=16$	5. $(3x+4)^2+(x-1)^2=17$
6. $(2x+7)(7-2x)-x(x+2)=49$	6. $(5x-1)(1+5x)-10(x-2)=1$
7. $\frac{x+5}{2x+1}=\frac{x+15}{3-x}$	7. $\frac{3x+4}{x-6}=\frac{x-2}{4x+3}$
8. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$	8. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+6}{x-3}$
9. $\frac{x\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}}=\frac{2x}{x\sqrt{3}-5}$	9. $\frac{2x}{x\sqrt{5}-3}=\frac{x\sqrt{5}}{2x-\sqrt{5}}$
10. $\sqrt[4]{2}.x+2=\frac{3\sqrt[4]{2}.x-\sqrt{5}.x-2}{\sqrt[4]{2}.x+1}$	10. $x+\frac{\sqrt{7}(x-2)}{x\sqrt{3}+1}=\frac{x-2\sqrt{7}}{1+x\sqrt{3}}$
11. $x^2-25=0$	11. $x^2-49=0$
12. $9x^2=16$	12. $4x^2=81$
13. $\frac{5x^2}{6}=\frac{6}{125}$	13. $\frac{3x^2}{8}=\frac{2}{75}$
14. $x^2+13=4$	14. $x^2+36=11$

15. $\frac{x}{6}+\frac{6}{x}=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$

16. $\frac{2x}{x-2}+\frac{x-2}{x}=2$

17. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3}$

18. $\frac{2-5x}{10x-5}=\frac{5x}{3-5x}$

19. $\frac{5\sqrt{7}-2x}{\sqrt{7}-10x}=\frac{\sqrt{7}-4x}{2(\sqrt{7}-x)}$

20. $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+x}{x+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{x-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-x}$

15. $\frac{5}{x}+\frac{x}{5}=\frac{3}{x}-\frac{x}{3}$

16. $\frac{5x}{x+3}+\frac{x+3}{x}=2$

17. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=2\frac{1}{6}$

18. $\frac{3-2x}{4x-8}=\frac{2x}{5-2x}$

19. $\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}-x}=\frac{9x+\sqrt{5}}{x}$

20. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}+x}{x+2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{x-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}-x}$

Рѣшеніе полнаго квадратнаго уравненія $ax^2+bx+c=0$ состоитъ также въ разложеніи первой части его на множителей. Это преобразованіе значительно упрощается въ томъ случаѣ, когда коэффиціентъ при высшемъ членѣ есть единица. Замѣтимъ, что всякое квадратное уравненіе можно привести къ такому виду. Нужно только раздѣлить обѣ части на коэффиціентъ a. Получимъ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Обыкновенно обозначаютъ $\frac{b}{a}$ буквой p и $\frac{c}{a}$ буквой q, отчего уравненіе пишется въ видѣ $x^2+px+q=0$. Такой видъ уравненія называется **приведеннымъ**. Неудобно, однако, преобразовывать всякое уравненіе къ приведенному виду, потому что въ послѣднемъ коэффиціенты p и q часто оказываются дробными.

Разсмотримъ частные виды уравненій съ цѣлыми коэффиціентами. Дано уравненіе $x^2-8x+15=0$. Въ первой части настоящаго сборника указывался способъ для разложенія трехчленовъ второй степени въ произведеніе. Этотъ способъ слѣдуетъ припомнить и примѣнять, гдѣ удобно, въ нижеслѣдующихъ задачахъ. Укажемъ теперь другой способъ, болѣе сложный, но и болѣе общій, состоящій въ преобразованіи трехчлена къ виду разности квадратовъ. Принимая x^2 за квадратъ и $8x$ за удвоенное произведеніе легко видѣть, что для преобразованія x^2-8x къ виду полнаго квадрата нужно прибавить еще второй квадратъ 16. Прибавляя это число къ первой части даннаго уравненія и затѣмъ вычитая то же число изъ нея, представимъ уравненіе въ видѣ $x^2-8x+16-1=0$ или въ видѣ $(x-4)^2-1=0$. Послѣ этого первая часть легко разлагается въ произведеніе, именно получаемъ $(x-3)(x-5)=0$ и находимъ два корня уравненія $x_1=3$ и $x_2=5$.

Иногда подобное разложеніе трехчлена требуетъ введенія мнимыхъ количествъ. Такъ, если дано уравненіе $x^2+2x+7=0$, то

преобразовавъ первые два члена его къ виду полнаго квадрата, находимъ $x^2+2x+1+6=0$ или $(x+1)^2+6=0$. Но въ первой части получается теперь не разность, а сумма. Замѣтивъ, что $i^2=-1$, пишемъ уравненіе въ видѣ $(x+1)^2-6i^2=0$, затѣмъ разлагаемъ въ форму $(x+1-\sqrt{6}.i)(x+1+\sqrt{6}.i)=0$ и наконецъ находимъ два мнимыхъ корня $x_1=-1+\sqrt{6}.i$ и $x_2=-1-\sqrt{6}.i$.

Если коэффиціентъ члена, содержащаго x въ первой степени, есть нечетное число, то дѣйствіе усложняется тѣмъ, что для составленія полнаго квадрата нужно вводить новый квадратъ отъ дробнаго числа. Напр., имѣемъ: $x^2+3x+2=0$, $x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=0$, $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$, $(x+2)(x+1)=0$; $x_1=-2$, $x_2=-1$.

Также: $x^2-5x+11=0$, $x^2-5x+\frac{25}{4}+\frac{19}{4}=0$, $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{19}{4}i^2=0$, $\left(x-\frac{5+\sqrt{19}.i}{2}\right).\left(x-\frac{5-\sqrt{19}.i}{2}\right)=0$; $x_1=\frac{5+\sqrt{19}.i}{2}$, $x_2=\frac{5-\sqrt{19}.i}{2}$.

Рѣшить полныя квадратныя уравненія:

21. $x^2-6x+8=0$
22. $x^2+12x+20=0$
23. $x^2-4x-12=0$
24. $x^2+2x-35=0$
25. $x^2-7x+12=0$
26. $x^2+x-6=0$
27. $x^2-7x-18=0$
28. $x^2+3x-130=0$
29. $x^2-2x+10=0$
30. $x^2-6x+34=0$
31. $(x-1)(x-2)=6$
32. $(x-2)^2=2(3x-10)$
33. $4x^2-4x=3$
34. $9x^2-5=12x$
35. $2x^2-7x+3=0$
36. $4x^2+x-3=0$
37. $(2x-3)^2=8x$
38. $(3x+2)^2=3(x+2)$
39. $x^2-x+1=0$
40. $x^2+3x+9=0$

21. $x^2-10x+21=0$
22. $x^2+6x+5=0$
23. $x^2-8x-20=0$
24. $x^2+6x-27=0$
25. $x^2+9x+14=0$
26. $x^2-3x-28=0$
27. $x^2-x-42=0$
28. $x^2+7x-18=0$
29. $x^2-4x+5=0$
30. $x^2-10x+29=0$
31. $(x-2)(12-x)=9$
32. $(x+1)^2=3(x+7)$
33. $4x^2-4x=15$
34. $9x^2-20=24x$
35. $5x^2-8x+3=0$
36. $3x^2-2x-8=0$
37. $(2x+5)^2=2(2x+9)$
38. $(3x-1)^2=12(3-x)$
39. $x^2+x+1=0$
40. $x^2-3x+9=0$

Такъ какъ приходится рѣшать квадратныя уравненія очень часто, то неудобно въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ продѣлывать тѣ преобразованія, посредствомъ которыхъ квадратное уравненіе разлагается на два уравненія первой степени. Квадратныя уравненія рѣшаютъ по общей формулѣ. Въ курсахъ алгебры доказывается, что, если уравненіе имѣетъ видъ $ax^2+bx+c=0$, то корни выражаются формулой $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, т.-е. корень общаго квадратнаго уравненія равенъ среднему коэффиціенту, взятому съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ или минусъ квадратный корень изъ разности между квадратомъ средняго коэффиціента и учетвереннымъ произведеніемъ крайнихъ коэффиціентовъ, все дѣленное на удвоенный первый коэффиціентъ.

Кромѣ этой формулы нужно знать еще болѣе простую формулу, соотвѣтствующую тому случаю, когда средній коэффиціентъ есть четное число. Если уравненіе имѣетъ видъ $ax^2+2\beta x+c=0$, то $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}}{a}$, т-е. корень квадратнаго уравненія съ четнымъ среднимъ коэффиціентомъ равенъ половинѣ средняго коэффиціента, взятой съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ или минусъ квадратный корень изъ разности между квадратомъ этой половины и произведеніемъ крайнихъ коэффиціентовъ, все дѣленное на первый коэффиціентъ.

Наконецъ, еще полезно замѣтить наиболѣе простую формулу, соотвѣтствующую тому случаю, когда первый коэффиціентъ есть единица, а средній четное число. Если уравненіе имѣетъ видъ $x^2+2\beta x+c=0$, то $x=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-c}$, т.-е. корень приведеннаго квадратнаго уравненія съ четнымъ среднимъ коэффиціентомъ равенъ половинѣ второго коэффиціента, взятой съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ или минусъ квадратный корень изъ разности между квадратомъ этой половины и третьимъ коэффиціентомъ.

Каждую изъ указанныхъ формулъ нужно прилагать не прежде, какъ преобразовавъ уравненіе къ простѣйшему виду, въ которомъ всѣ коэффиціенты суть цѣлыя количества и первый коэффиціентъ положителенъ. Нужно помнить притомъ, что коэффиціенты разсматриваются вмѣстѣ со знаками ихъ.

Примѣчаніе. Въ курсахъ алгебры указывается еще формула. Если уравненіе имѣетъ видъ $x^2+px+q=0$, то $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Эта формула есть общая, потому что всякое квадратное уравненіе можетъ быть преобразовано въ приведенное. Но для вычисленія

корней упомянутая формула неудобна, потому что приводитъ дѣйствіе съ цѣлыми количествами къ дѣйствію съ дробями.

При начальныхъ упражненіяхъ полезно выписывать коэффиціенты съ ихъ знаками отдѣльно отъ буквы, обозначающей неизвѣстное. Для первыхъ упражненій слѣдуетъ передѣлать вновь примѣры съ 21 до 40, уже приведенные выше.

Преобразовать къ простѣйшему виду и рѣшить уравненія:

41. $x^2-22x+25=2x^2-20x+1$ 41. $10+2x^2-2x=3x^2-5x$

42. $2-8x+3x^2=-4+2x^2-3x$ 42. $24x^2-7+16x=4x+20x^2$

43. $(3x-2)^2=8(x+1)^2-100$ 43. $(2x-8)^2=4(3x+25)+12$

44. $(3-x)(4-x)=2x^2-20x+48$ 44. $(2x+1)(x+2)=3x^2-4$

45. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+7\frac{3}{8}=8$ 45. $\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{8}-\frac{7}{6}=1\frac{1}{3}$

46. $\frac{x+1}{x-2}=\frac{3x-7}{x-1}$ 46. $\frac{x+8}{3}=x-\frac{x-3}{x}$

47. $\frac{x-7}{2(x+3)}=\frac{x-6}{x+24}$ 47. $\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{2(x+3)}{x+12}$

48. $\frac{x}{4}+\frac{2}{x}+\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{(x+2)(x+1)}{x}$ 48. $\frac{x}{4}+\frac{8}{x}+\frac{(x-2)^2}{x}=\frac{(4-x)(2-x)}{x}$

49. $\frac{x+1}{3}+\frac{3(x-1)}{4}=(x-3)^2+1$ 49. $\frac{11x}{10}-\frac{x-4}{4}=\frac{2x(x-7)}{6}-1$

50. $\frac{3(3x-1)}{12x+1}=\frac{2(3x+1)}{15x+8}$ 50. $\frac{3(5x-1)}{20x+1}=\frac{2(5x+1)}{25x+8}$

51. $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5$

51. $\frac{x(2x-10)}{12}-\frac{(x-7)^2}{2}=\frac{(14-x)^2}{3}+(11-x)^2$

52. $\frac{(x-20)(x-10)}{10}-\frac{(34-x)(40-x)}{2}+\frac{(30-x)(5-x)}{3}=0$

52. $\frac{2x(x-1)}{8}-\frac{(x-20)(30-x)}{4}-\frac{(x-14)^2}{3}=2(x+1)$

53. $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x+1}$ 53. $\frac{2(x+7)}{x+1}-\frac{x+11}{x^2-1}=4-\frac{x-1}{x+1}$

54. $\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{x+3}{3-x}-\frac{4+x}{3+x}$ 54. $\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{14}{x^2-9}+\frac{4-x}{3+x}$

55. $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x}$ 55. $\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3(x^2-4)}=\frac{1}{2-x}-1$

56. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}-\frac{2x+13}{x+1}=0$ 56. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}-\frac{x-7}{x-1}=4$

57. $\frac{1}{x^2-x-6}+\frac{2}{x^2+x-6}=\frac{4}{x^2-9}-\frac{2}{x^2-4}$

57. $\frac{20}{x^2+3x+2}-\frac{2}{x^2-3x+2}=\frac{8}{x^2-1}-\frac{5}{x^2-4}$

58. $\frac{x^2+10x}{x^4-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}$

58. $\frac{4(5x-x^2)}{16x^4-1}+\frac{4}{2x-1}=\frac{16x^2+21}{8x^3-4x^2+2x-1}+\frac{1}{8x^3+4x^2+2x+1}$

59. $\frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2+17}{x^2+x+1}=\frac{x+36}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$

59. $\frac{2}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2-x+1}=\frac{x^2-1}{x^2-x+1}-\frac{2x(x-5)}{x^3+1}$

60. $\frac{12}{x^2+11x+30}-\frac{1}{x^2-11x+30}=\frac{20}{x^2+x-30}-\frac{15}{x^2-x-30}$

60. $\frac{11}{x^2+8x+15}-\frac{1}{x^2-8x+15}=\frac{22}{x^2+2x-15}-\frac{8}{x^2-2x-15}$

§ 2. Рѣшеніе буквенныхъ уравненій второй степени.

Преобразованіе буквенныхъ квадратныхъ уравненій къ простѣйшему ихъ виду и рѣшеніе такихъ уравненій, послѣ ихъ преобразованія, выполняются тѣми же пріемами и по тѣмъ же формуламъ, какія были указаны въ предыдущемъ параграфѣ. Рѣшенія уравненія вида $ax^2+bx=0$ выполняется посредствомъ вывода x за скобку. Уравненія вида $ax^2+c=0$, въ отличіе отъ прежде указаннаго способа разложенія, короче рѣшать посредствомъ извлеченія корня. Полныя уравненія нужно рѣшать по тѣмъ же прежде указаннымъ тремъ формуламъ.

Рѣшить неполныя квадратныя уравненія:

61. $\frac{x-a}{a}=\frac{a}{x-a}$

61. $\frac{2x+a}{a}=\frac{a}{2x+a}$

62. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{a-x}{x-b}$

62. $\frac{x-2a}{x+2a}=\frac{b-x}{x+b}$

63. $\frac{a-x}{x}-\frac{x}{a+x}=\frac{a}{x}$

63. $\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$

64. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}$

64. $\frac{x+b}{x-a}-\frac{x-b}{x+a}=\frac{4x^2}{x^2-a^2}$

65. $ax^2-b^3=a^3-bx^2$

65. $a^2x^2+b^4=a^4+b^2x^2$

66. $\frac{ax}{a+1}=\frac{a+1}{ax}$

66. $\frac{ax-3}{a}=\frac{a+6}{ax+3}$

67. $\frac{c}{ab}-2x^2=\frac{a}{b}x^2+\frac{b}{a}x^2$

67. $\frac{c^2x}{a}-\frac{b}{x}=\frac{x+3ab}{ax}-\frac{1}{a}$

68. $(x+13a)^2+9(x+3a)^2=4(x+10a)^2$

68. $(21a-x)^2+(x-3a)^2=(7a-3x)^2+(3x-a)^2$

69. $\frac{2a+b+x}{x+2a-b}=\frac{x-2a+b}{2a+b-x}$ 69. $\frac{5a+b-x}{a+5b-x}=\frac{a^2(a+5b+x)}{b^2(5a+b+x)}$

70. $\frac{x^2+2ax}{x^3-a^3}+\frac{x}{(x+a)^2-ax}=\frac{1}{x-a}$ 70. $\frac{x^2}{x^3+a^3}-\frac{x}{(x-a)^2+ax}=\frac{1}{x+a}$

Рѣшить полныя квадратныя уравненія:

71. $x^2-4ax+3a^2=0$ 71. $x^2+8ax+15a^2=0$

72. $x^2+2a^3x-35a^6=0$ 72. $x^2+6a^2x-27a^4=0$

73. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ 73. $x^2-2bx-a^2+b^2=0$

74. $x^2+2bx-a^2+8ab-15b^2=0$ 74. $x^2-4bx-4a^2-12ab-5b^2=0$

75. $2x^2-3ax-2a^2=0$ 75. $4x^2-20ax+9a^2=0$

76. $6x^2+5ax+a^2=0$ 76. $8x^2+2ax-3a^2=0$

77. $3b^2x^2+15abx+3a^2=0$ 77. $6b^2x^2-5abx-6a^2=0$

78. $20b^2x^2-9abx-20a^2=0$ 78. $24b^2x^2+14abx-3a^2=0$

79. $(mx+n)(nx-m)=0$ 79. $(n-mx)(nx+m)=0$

80. $ab(x^2+1)-(a^2+b^2)x=0$ 80. $ax(bx-a)-c(a-bx)=0$

81. $bx^2-a=(a-b)x$ 81. $(a-b)x^2+2b=(a+b)x$

82. $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$ 82. $(a^2-b^2)x^2-ab=(a^2+b^2)x$

83. $x-\frac{1}{a}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ 83. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

84. $\frac{a}{a+x}+\frac{a-x}{x}=\frac{11}{10}$ 84. $\frac{a}{x-a}-\frac{x}{x+a}=\frac{7}{5}$

85. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x+b}{x-b}=1$ 85. $\frac{x+a}{x-b}-\frac{x-a}{x+b}=1$

86. $\frac{a+4b}{x+2b}-\frac{a-4b}{x-2b}=\frac{4b}{a}$ 86. $\frac{a+6b}{x+3b}+\frac{a-6b}{3b-x}=\frac{6b}{a}$

87. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$ 87. $\frac{a}{x-a}-\frac{2a}{x-2a}+\frac{3a}{x-3a}=0$

88. $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$ 88. $\frac{2x+a}{x^2+ax+a^2}+\frac{1}{x-a}=\frac{4a^2}{3(x^3-a^3)}$

89. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$ 89. $\frac{1}{a-b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{b}{x}$

90. $\frac{a(x-2)}{b}+\frac{a}{bx}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{b(x-2)}{a}$ 90. $\frac{a(x-2)}{b}+\frac{a}{bx}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{b(x+2)}{a}$

91. $(a+b)(a-b)x^2=ab(2ax-ab)$ 91. $abx^2+(a+b)^2=(a+b)(ab+1)x$

92. $x^2-\frac{cx}{a+b}-\frac{2c^2}{(a+b)^2}=0$ 92. $bc(x-a)-\frac{bc}{x-a}+c^2-b^2=0$

93. $\frac{2a+b-x}{2b+a-x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{x+b}{x+a}$ 93. $\frac{3a+b-x}{3a-b-x}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a-b+x}{a+b+x}$

94. $\frac{4a+3b-x}{4b+3a-x}=\frac{2a+b}{2b+a}\cdot\frac{2a+3b+x}{2b+3a+x}$

95. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

96. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$

97. $\frac{a+b-x}{a-b-x}=\frac{a-c+x}{a-c-x}$

98. $\frac{(a-x)(a-b)+(x-b)^2}{(a-x)^2+(2x-a-b)(x-b)}=\frac{49}{19}$

99. $\frac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)}+\frac{a+x}{x}=\frac{a}{a-2cx}$

100. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$

94. $\frac{5a+4b-x}{5b+4a-x}=\frac{2a+b}{2b+a}\cdot\frac{a+2b+x}{b+2a+x}$

95. $\frac{x+a}{a-x}+\frac{b-x}{x+b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

96. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=0$

97. $\frac{2x+b+3c}{b-3c-2x}=\frac{x-2b-c}{x+2b-c}$

98. $\frac{(a+x)(2x+a-b)+(x-b)^2}{(a+x)^2-(x-b)(a+b)}=\frac{7}{3}$

99. $\frac{a-c(a+x)}{a-c(a-x)}+\frac{a+x}{x}=\frac{a}{a+2cx}$

100. $\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}+\frac{x-c}{x+c}=3$

§ 3. Простѣйшія примѣненія теоріи квадратнаго уравненія.

Корни квадратнаго приведеннаго уравненія $x^2+px+q=0$ бываютъ дѣйствительными и различными при условіи $p^2>4q$, равными при условіи $p^2=4q$ и мнимыми при условіи $p^2<4q$.

Подобнымъ же образомъ корни общаго уравненія $ax^2+bx+c=0$ дѣйствительны и различны при условіи $b^2>4ac$, равны при условіи $b^2=4ac$ и мнимы при условіи $b^2<4ac$.

Не рѣшая слѣдующихъ уравненій, опредѣлить, какія изъ нихъ имѣютъ дѣйствительные, равные или мнимые корни:

101. $x^2+6x+5=0$

102. $x^2-10x+25=0$

103. $x^2+4x+5=0$

104. $x^2+8x+25=0$

105. $x^2+2x-120=0$

106. $x^2+24x+144=0$

107. $12x^2+7x-12=0$

108. $4x^2-4x+13=0$

109. $25x^2+30x+9=0$

110. $2x^2-18x+65=0$

101. $x^2-6x+8=0$

102. $x^2-14x+49=0$

103. $x^2-9x+20=0$

104. $x^2+11x+130=0$

105. $x^2+3x-180=0$

106. $x^2+30x+225=0$

107. $9x^2-12x+4=0$

108. $3x^2+12x+13=0$

109. $9x^2-42x+49=0$

110. $36x^2+48x+61=0$

Въ уравненіи приведенномъ сумма корней равна коэффиціенту p, взятому съ противоположнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно коэффиціенту q.

Въ уравненіи общемъ сумма корней равна отношенію коэффиціентовъ $\frac{b}{a}$, взятому съ противоположнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно отношенію коэффиціентовъ $\frac{c}{a}$.

Пользуясь этими замѣчаніями, можно опредѣлить знаки дѣйствительныхъ корней.

Не рѣшая слѣдующихъ уравненій, опредѣлить знаки корней ихъ, если послѣдніе дѣйствительны:

111. $x^2-8x+15=0$	111. $x^2+9x+14=0$
112. $x^2+4x-3=0$	112. $x^2-2x-15=0$
113. $x^2-17x-60=0$	113. $x^2+x-42=0$
114. $x^2-5x+130=0$	114. $x^2+7x+200=0$
115. $x^2-26x+169=0$	115. $x^2-34x+289=0$
116. $x^2-3x-460=0$	116. $x^2-3x-340=0$
117. $2x^2+5x+2=0$	117. $3x^2-7x+2=0$
118. $6x^2-5x-6=0$	118. $9x^2-24x-20=0$
119. $4x^2+2x+1=0$	119. $9x^2+3x+1=0$
120. $8x^2+4x-1=0$	120. $26x^2-30x-1=0$

Пользуясь связью между коэффиціентами и корнями квадратнаго уравненія, можно составлять уравненія по даннымъ корнямъ ихъ. При этомъ уравненіе составляется въ приведенной формѣ. Если же коэффиціенты полученнаго уравненія оказываются дробными, то, уничтожая знаменателя, получаемъ уравненіе въ общей формѣ.

Составить квадратныя уравненія по даннымъ корнямъ ихъ:

121. 2 и 3	121. 7 и -5	**122.** -4 и 6	122. -8 и -5
123. -5 и 0	123. 8 и 0	**124.** 3 и -3	124. -7 и 7
125. $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$	125. $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$	**126.** $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$	126. $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$
127. $\sqrt{6}$ и $-\sqrt{3}$	127. $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{6}$	**128.** $4\pm\sqrt{3}$	128. $2\pm\sqrt{5}$
129. $-3\pm\sqrt{-15}$	129. $5\pm\sqrt{-3}$	**130.** $1\pm\sqrt{-10}$	130. $2\pm\sqrt{-6}$
131. $3a, -2b$	131. $a, -3b$	**132.** $2a-b, a-2b$	132. $a+3b, 3a+b$
133. $-\frac{a}{3}, \frac{a}{2}$	133. $\frac{a}{2}, -\frac{a}{5}$	**134.** $a\pm b$	134. $2a\pm b$
135. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$	135. $\frac{a}{b}, -\frac{b}{a}$	**136.** $\frac{a-b}{a+b}$, 1	136. 1, $\frac{a+b}{a-b}$
137. $\frac{ab}{a\pm b}$	137. $\frac{a\pm b}{ab}$	**138.** $\frac{b}{1-a}, \frac{a}{1-b}$	138. $\frac{a}{1+b}, \frac{b}{1+a}$
139. $a\pm\sqrt{b}$	139. $b\sqrt{\pm a}$	**140.** $\sqrt{a}\pm\sqrt{-b}$	140. $\sqrt{b}\pm\sqrt{-a}$

Квадратный трехчленъ вида x^2+px+q всегда разлагается въ произведеніе $(x-x_1)(x-x_2)$, гдѣ x_1 и x_2 суть корни трехчлена.

Трехчленъ вида ax^2+bx+c разлагается въ произведеніе $a(x-x_1)(x-x_2)$, отличающееся отъ предыдущаго лишнимъ множителемъ a.

Разложить трехчлены въ произведенія:

141. $x^2-7x+12$ 141. $x^2-9x+18$

142. $x^2+3x-108$ 142. $x^2+5x-204$

143. $6x^2+5x-6$ 143. $15x^2+34x+15$

144. $30x^2+37x+10$ 144. $21x^2+22x-8$

145. $x^2-6x+11$ 145. $x^2-9x+21$

146. $x^2+15x+44$ 146. $x^2-10x+22$

147. $x^2-ax-6a^2$ 147. $x^2+ax-2a^2$

148. $abx^2-2ax+a^2-b^2$ 148. $(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2-a^2$

149. $x^2-ax-a\sqrt{b}-b$ 149. $x^2+\sqrt{b}.x-a^2+a\sqrt{b}$

150. $abx^2-2a\sqrt{ab}.x+a^2-b^2$ 150. $a^2b^2x^2-2ab^2\sqrt{b}.x+b^3-a^3$

151. Полагая, что корни уравненія $x^2+px+q=0$ суть x_1 и x_2, составить уравненіе, котораго корни были бы $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

151. Полагая, что корни уравненія $ax^2+bx+c=0$ суть x_1 и x_2, составить уравненіе, котораго корни были бы $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

152. Составить уравненіе, котораго корни были бы въ m разъ больше корней уравненія $x^2+px+q=0$.

152. Составить уравненіе, котораго корни были бы въ m разъ больше корней уравненія $ax^2+bx+c=0$.

153. Составить уравненіе, котораго корни были бы на $\frac{p}{2}$ больше корней уравненія $x^2+px+q=0$.

153. Составить уравненіе, котораго корни были бы на $\frac{b}{a}$ больше корней уравненія $x^2+px+q=0$.

154. Составить уравненіе, котораго корнями были бы сумма и произведеніе корней уравненія $x^2+px+q=0$.

154. Составить уравненіе, котораго корнями были бы сумма и произведеніе корней уравненія $ax^2+bx+c=0$.

155. Выразить сумму квадратовъ корней уравненія $x^2+px+q=0$ черезъ коэффиціенты p и q.

155. Выразить разность квадратовъ корней уравненія $x^2+px+q=0$ черезъ коэффиціенты p и q.

156. Выразить сумму кубовъ корней того же уравненія.

156. Выразить разность кубовъ корней того же уравненія.

157. Не рѣшая уравненія $x^2-2x-15=0$, вычислить сумму квадратовъ и кубовъ корней его.

157. Имѣя уравненіе $x^2+2x-35=0$, вычислить разность квадратовъ и кубовъ корней его.

158. Не рѣшая уравненія $3x^2+7x+2=0$, вычислить сумму квадратовъ и кубовъ корней его.

158. Имѣя уравненіе $2x^2-7x+3=0$, вычислить разность квадратовъ и кубовъ корней его.

159. Рѣшить уравненіе $x^2-8x+q=0$, зная, что сумма квадратовъ его корней равна 34.

159. Рѣшить уравненіе $x^2+px+21=0$, зная, что сумма квадратовъ его корней равна 58.

160. Рѣшить уравненіе $x^2+px+45=0$, зная, что квадратъ разности его корней равенъ 144.

160. Рѣшить уравненіе $x^2-17x+q=0$, зная, что квадратъ разности его корней равенъ 49.

161. При какомъ значеніи b уравненіе $4x^2+bx+64=0$ имѣетъ равные корни?

161. При какомъ значеніи b уравненіе $9x^2+bx+25=0$ имѣетъ равные корни?

162. Показать, что трехчленъ ax^2+bx+c преобразовывается въ полный квадратъ при условіи $b^2=4ac$.

162. Показать, что трехчленъ ax^2+bx+c преобразовывается въ полный квадратъ при условіи $b^2=4ac$.

163. При какихъ положительныхъ значеніяхъ c корни уравненія $3x^2-18x+c=0$ дѣйствительны и при какихъ мнимы?

163. При какихъ положительныхъ значеніяхъ c корни уравненія $5x^2+10x+c=0$ дѣйствительны и при какихъ мнимы?

164. Опредѣлить корни уравненія $ax^2+bx=0$ по общей формулѣ разрѣшающей полное уравненіе.

164. Опредѣлить корни уравненія $ax^2+c=0$ по общей формулѣ разрѣшающей полное уравненіе.

165. Въ уравненіи $x^2-6x+q=0$ опредѣлить то значеніе q, при которомъ корни его x_1 и x_2 удовлетворяютъ уравненію $3x_1+2x_2=20$.

165. Въ уравненіи $x^2-5x+q=0$ опредѣлить то значеніе q при которомъ корни его x_1 и x_2 удовлетворяютъ уравненію $3x_1+5x_2=17$.

166. Найти условіе, при которомъ трехчленъ $(a-b)x^2-(a+b)x+a-b$ представляетъ полный квадратъ.

166. Найти условіе, при которомъ трехчленъ $(a+b)x^2-(a-b)x+a+b$ представляетъ полный квадратъ.

167. Каковы должны быть знаки коэффиціентовъ уравненія $ax^2+bx+c=0$ для того, чтобы оба корня этого уравненія были положительны?

167. Каковы должны быть знаки коэффиціентовъ уравненія $ax^2+bx+c=0$ для того, чтобы оба корня этого уравненія были отрицательны?

168. Показать, что корни уравненія $x^2+px+q=0$ при условіи $p=k+\frac{q}{k}$ всегда соизмѣримы, если только самыя количества p, q и k соизмѣримы.

168. Показать, что корни уравненія $ax^2+bx+c=0$ при условіи $b=ak+\frac{c}{k}$ всегда соизмѣримы, если только самыя количества a, b, c и k соизмѣримы.

169. Какое преобразованіе нужно выполнить съ обоими корнями уравненія $x^2+px+q=0$, чтобы въ выраженіяхъ этихъ корней числители сдѣлались раціональными, а радикалъ перешелъ бы въ знаменателя?

169. Какое преобразованіе нужно выполнить съ обоими корнями уравненія $ax^2+bx+c=0$, чтобы въ выраженіяхъ этихъ корней числители сдѣлались раціональными, а радикалъ перешелъ бы въ знаменателя?

170. Пользуясь предыдущимъ преобразованіемъ, показать, что если въ уравненіи $ax^2-bx+c=0$, гдѣ b есть абсолютное число коэффиціентъ a безпредѣльно уменьшается, то одинъ изъ корней безпредѣльно увеличивается, а другой приближается къ значенію $\frac{c}{b}$.

170. Пользуясь предыдущимъ преобразованіемъ, показать, что если въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$, гдѣ b есть абсолютное число коэффиціентъ a безпредѣльно уменьшается, то одинъ изъ корней безпредѣльно увеличивается, а другой приближается къ значенію $-\frac{c}{b}$.

§ 4. Составленіе квадратныхъ уравненій.

Если рѣшеніе вопроса приводитъ къ составленію квадратнаго уравненія, то, вообще говоря, отвѣтъ на вопросъ дается двумя значеніями неизвѣстнаго. Если эти значенія дѣйствительны, то вопросъ возможенъ и рѣшается, вообще говоря, двояко.

Однако, можетъ оказаться, что одно изъ двухъ значеній неизвѣстнаго не удовлетворяетъ нѣкоторымъ условіямъ вопроса, которыя подразумѣваются, хотя обыкновенно и не указываются прямо. Въ такомъ случаѣ неподходящее рѣшеніе должно быть отброшено.

171. Сумма катетовъ прямоугольнаго треугольника равна 17 футамъ, гипотенуза 13 ф.. Найти катеты.

171. Периметръ прямоугольника равенъ 42 футамъ, діагональ его 15 ф. Найти стороны.

172. Сумма квадратовъ трехъ послѣдовательныхъ чиселъ равна 365. Найти эти числа.

172. Сумма квадратовъ трехъ послѣдовательныхъ четныхъ чиселъ равна 116. Найти эти числа.

173. Площади двухъ квадратовъ относятся какъ 25:9; сторона перваго на 10 футовъ длиннѣе стороны другого. Опредѣлить стороны.

173. Площади двухъ равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ относятся какъ 25:49; сторона перваго на 14 футовъ короче стороны другого. Опредѣлить стороны.

174. Продано нѣсколько пудовъ товара за 120 рублей; цѣна пуда въ рубляхъ на 2 меньше числа пудовъ. Сколько пудовъ продано?

174. Продано нѣсколько пудовъ товара за 270 рублей; цѣна пуда въ рубляхъ на 3 больше числа пудовъ. Сколько пудовъ продано?

175. Найти двузначное число, зная, что число простыхъ единицъ искомаго числа двумя больше числа его десятковъ, и что произведеніе числа на сумму чиселъ, обозначенныхъ его цифрами, есть 144.

175. Найти двузначное число, зная, что число десятковъ искомаго числа двумя больше числа его простыхъ единицъ и что произведеніе числа на сумму чиселъ, обозначенныхъ его цифрами, есть 640.

176. Куплено на 1 р. 30 к. по нѣскольку фунтовъ товара двухъ сортовъ, при чемъ второго на 2 ф. больше, чѣмъ перваго. За фунтъ каждаго товара платили столько копѣекъ, сколько было куплено фунтовъ этого товара. Сколько куплено фунтовъ каждаго сорта?

176. Куплено на 1 р. 17 коп. по нѣскольку фунтовъ товара двухъ сортовъ, при чемъ второго на 3 ф. меньше, чѣмъ перваго. За фунтъ каждаго товара платили столько копѣекъ, сколько было куплено фунтовъ этого товара. Сколько куплено фунтовъ каждаго сорта?

177. Возможенъ ли такой прямоугольный треугольникъ, у котораго стороны выражаются тремя послѣдовательными цѣлыми числами?

177. Возможенъ ли такой прямоугольный треугольникъ, у котораго стороны выражаются тремя послѣдовательными четными или нечетными числами?

178. Нѣсколько человѣкъ должны были заплатить поровну всего 72 рубля. Если бы ихъ было тремя меньше, то каждому пришлось бы заплатить четырьмя рублями больше. Сколько ихъ было?

178. Нѣсколько человѣкъ должны были заплатить 60 рублей. Если бы ихъ было тремя больше, то каждому пришлось бы заплатить рублемъ меньше. Сколько ихъ было?

179. Въ плоскости расположено нѣсколько точекъ такъ, что черезъ любую пару точекъ проходитъ особая прямая линія. Всѣхъ такихъ линій оказывается 10 Сколько точекъ?

179. Въ плоскости расположено нѣсколько точекъ такъ, что черезъ любую пару точекъ проходитъ особая прямая линія. Всѣхъ такихъ линій оказывается 15. Сколько точекъ?

180. Бассейнъ наполняется двумя трубами въ 6 часовъ. Одна первая труба наполняетъ его 5-ю часами скорѣе, чѣмъ одна вторая. Во сколько времени каждая труба, дѣйствуя отдѣльно, можетъ наполнить бассейнъ?

180. Бассейнъ наполняется двумя трубами въ 3 ч. 36 м.. Одна первая труба наполняетъ его 3-мя часами скорѣе, чѣмъ одна вторая. Во сколько времени каждая труба, дѣйствуя отдѣльно, можетъ наполнить бассейнъ?

181. Нѣкто, продавъ часы за 39 рублей, получилъ при этомъ столько процентовъ прибыли. сколько рублей ему самому стоили часы. Что они ему стоили?

181. Нѣкто, продавъ часы за 24 рубля, получилъ при этомъ столько процентовъ убытку, сколько рублей ему самому стоили часы. Что они ему стоили?

182. Купецъ, получивъ по наслѣдству нѣкоторый капиталъ, расходовалъ изъ него ежегодно по столько процентовъ, сколько въ капиталѣ было сотенъ рублей Черезъ 4 года у него осталось 400 р.. Какъ великъ былъ капиталъ?

182. Купецъ, отдавъ свой капиталъ въ ростъ. наживалъ на него ежегодно по столько процентовъ, сколько въ капиталѣ было сотенъ рублей. Черезъ 10 лѣтъ капиталъ съ прибылью обратился въ сумму 2640 рублей. Какъ великъ былъ капиталъ?

183. Возможенъ ли такой многоугольникъ, въ которомъ было бы всего на всего 10 діагоналей?

183. Возможенъ ли такой многоугольникъ, въ которомъ было бы всего на всего 5 діагоналей?

184. Куплено товару двухъ сортовъ, перваго на 156 рублей, второго на 210 руб.. Второго сорта на 3 пуда больше, чѣмъ перваго, и стоитъ онъ за пудъ рублемъ дороже. Сколько куплено каждаго сорта?

184. Куплено товару двухъ сортовъ, перваго на 240 рублей, второго на 320 руб.. Перваго сорта на 4 пуда больше, чѣмъ второго, но стоитъ онъ за пудъ восемью рублями дешевле Сколько куплено каждаго сорта?

185. Два лица одновременно выѣзжаютъ изъ одного города въ другой. Первый проѣзжаетъ въ часъ одной верстой больше второго и поспѣваетъ пріѣхать часомъ раньше. Разстояніе между городами 56 верстъ Сколько верстъ проѣзжаетъ каждый изъ нихъ въ часъ?

185. Два лица выѣзжаютъ одновременно изъ городовъ А и В навстрѣчу другъ другу. Первый проѣзжаетъ въ часъ двумя верстами больше второго и пріѣзжаетъ въ В часомъ раньше того, какъ второй въ А. Разстояніе АВ равно 24 верстамъ. Сколько верстъ проѣзжаетъ каждый изъ нихъ въ часъ?

186. Долгъ въ 820 рублей уплаченъ въ два годичныхъ срока, при чемъ въ концѣ каждаго года платили по 441 руб.. Поскольку процентовъ былъ сдѣланъ заемъ?

186. Долгъ въ 2100 рублей уплаченъ въ два годичныхъ срока, при чемъ въ концѣ каждаго года платили по 1210 руб.. Поскольку процентовъ былъ сдѣланъ заемъ?

187. Наняты два работника по разной цѣнѣ. Первый получилъ 48 рублей. а второй, работавшій шестью днями меньше перваго, получилъ 27 руб.. Если бы первый работалъ столько дней. сколько второй, а второй столько, сколько первый, то они получили бы поровну. Сколько дней работалъ каждый?

187. Наняты два работника по разной цѣнѣ. Первый получилъ 45 рублей, а второй, работавшій шестью днями больше перваго, получилъ 80 руб.. Если бы первый работалъ столько дней, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то они получили бы поровну. Сколько дней работалъ каждый?

188. Два разносчика, имѣя вмѣстѣ 100 яблокъ. получили при продажѣ ихъ одинаковыя суммы. Если бы первый продалъ столько, сколько второй, то получилъ бы 1 руб. 80 коп., а если бы второй продалъ столько, сколько первый, то получилъ бы 80 коп.. Сколько яблокъ было у каждаго?

188. Два разносчика, имѣя вмѣстѣ 110 яблокъ, выручили при продажѣ ихъ одинаковыя суммы. Если бы первый продалъ столько, сколько второй. то получилъ бы 75 коп., а если бы второй продалъ столько, сколько первый, то получилъ бы 1 рубль 8 коп.. Сколько яблокъ было у каждаго?

189. Наняты два работника на одинъ и тотъ же срокъ работы, но по разной цѣнѣ. Первый кончилъ работу однимъ днемъ раньше срока и получилъ 18 рублей, второй кончилъ тремя днями раньше и получилъ 21 рубль. Если бы первый работалъ столько дней, сколько второй. а второй столько, сколько первый. то второй получилъ бы 13-ю рублями больше перваго. На какой срокъ были наняты рабочіе?

189. Наняты два работника на одинъ и тотъ же срокъ работы, но по разной цѣнѣ. Первый кончилъ работу двумя днями раньше срока и получилъ 27 рублей, второй кончилъ тремя днями раньше и получилъ 30 рублей. Если бы первый работалъ столько дней, сколько второй. а второй столько, сколько первый, то второй получилъ бы тремя рублями меньше перваго. На какой срокъ были наняты рабочіе?

190. Одна часть капитала, состоящаго изъ 8000 руб., приноситъ ежегодно 90 руб., а другая 200 руб. прибыли. Поскольку процентовъ отдана каждая часть въ ростъ, если со второй получается однимъ процентомъ больше, чѣмъ съ первой?

190. Одна часть капитала, состоящаго изъ 6000 рублей, приноситъ ежегодно 240 рублей, а другая 100 рублей прибыли. Какъ велика каждая часть капитала, если съ первой получается однимъ процентомъ больше, чѣмъ со второй?

191. Окружность передняго колеса экипажа въ 4 раза больше окружности задняго; если бы окружность передняго колеса уменьшить на 2 фута. а задняго увеличить на одинъ футъ. то на пространствѣ 120 футовъ переднее колесо сдѣлало бы на 18 оборотовъ меньше задняго. Найти окружности обоихъ колесъ.

191. Окружность передняго колеса экипажа въ 3 раза больше окружности задняго; если бы окружность передняго колеса увеличить на 3 фута, а задняго на 2 фута, то на пространствѣ 108 футовъ переднее колесо сдѣлало бы на 15 оборотовъ меньше задняго. Найти окружности обоихъ колесъ.

192. А отправился въ путь изъ города M къ городу N и проходилъ по 12 верстъ въ день. Послѣ того. какъ онъ прошелъ 65 верстъ, навстрѣчу ему изъ города N отправился B. Проходя каждый день $\frac{1}{30}$ всего разстоянія между городами M и N, B по прошествіи столькихъ дней, сколько онъ дѣлалъ въ день верстъ, встрѣтилъ А. Опредѣлить разстояніе между городами M и N.

192. А отправился въ путь изъ города M къ городу N и проходилъ по 8 верстъ въ день. Послѣ того, какъ онъ прошелъ 27 верстъ, навстрѣчу ему изъ города N отправился B. Проходя каждый день $\frac{1}{20}$ всего разстоянія между городами M и N, B по прошествіи столькихъ дней. сколько онъ дѣлалъ въ день верстъ, встрѣтилъ А. Опредѣлить разстояніе между городами M и N.

193. Курьеръ, выѣзжающій изъ мѣста A, долженъ поспѣть въ мѣсто B черезъ 5 часовъ. Въ то же время другой курьеръ выѣзжаетъ изъ мѣста C и, чтобы поспѣть въ B въ одно время съ первымъ, долженъ проѣзжать каждую версту на $1\frac{1}{4}$ минуты скорѣе, чѣмъ первый. Разстояніе отъ C до B на 20 верстъ больше разстоянія отъ A до B. Опредѣлить послѣднее.

193. Курьеръ, выѣзжающій изъ мѣста A, долженъ поспѣть въ мѣсто B черезъ 6 часовъ. Въ то же время другой курьеръ выѣзжаетъ изъ мѣста C и, чтобы поспѣть въ B въ одно время съ первымъ, долженъ проѣзжать каждую версту одной минутой дольше, чѣмъ первый. Разстояніе отъ C до B на 12 верстъ меньше разстоянія отъ A до B. Опредѣлить послѣднее.

194. Два поѣзда отправляются изъ двухъ городовъ А и В, разстояніе между которыми n верстъ и идутъ навстрѣчу одинъ другому. Они могутъ встрѣтиться на половинѣ пути, если поѣздъ изъ В выйдетъ на $1^1/_2$ часа раньше другого. Если бы оба поѣзда вышли одновременно, то черезъ 6 часовъ разстояніе между ними составляло бы десятую часть первоначальнаго разстоянія. Сколько часовъ каждый поѣздъ употребляетъ на прохожденіе отъ А до В?

194. Два поѣзда отправляются изъ двухъ городовъ А и В, разстояніе между которыми n верстъ, и идутъ навстрѣчу одинъ другому. Они могутъ встрѣтиться на половинѣ пути, если поѣздъ изъ В выйдетъ на $2^1/_2$ часа позднѣе другого. Если бы оба поѣзда вышли одновременно, то черезъ 5 часовъ разстояніе между ними составляло бы шестую часть первоначальнаго разстоянія. Сколько часовъ каждый поѣздъ употребляетъ для прохожденія изъ А въ В?

195. Два лица идутъ навстрѣчу одинъ другому изъ двухъ мѣстъ А и В. При встрѣчѣ оказывается, что первый прошелъ 6-ю верстами больше второго. Продолжая движеніе, первый приходитъ въ В черезъ 4 часа, а второй въ А черезъ 9 часовъ послѣ встрѣчи Какъ велико разстояніе отъ А до В?

195. Два лица идутъ навстрѣчу одинъ другому изъ двухъ мѣстъ А и В. При встрѣчѣ оказывается, что первый прошелъ 4-мя верстами меньше второго. Продолжая движеніе, первый приходитъ въ В черезъ 4 часа 48 минутъ, а второй въ А черезъ 3 часа 20 минутъ послѣ встрѣчи. Какъ велико разстояніе отъ А до В?

196 Изъ чана, наполненнаго спиртомъ, вылили часть спирта и долили водой; потомъ вылили столько же, сколько прежде, ведеръ смѣси и снова долили водой. Тогда въ чанѣ осталось 49 ведеръ чистаго спирта. Вмѣстимость чана 64 ведра. Сколько вылили спирта въ первый и во второй разъ?

196. Изъ чана, наполненнаго спиртомъ, вылили часть спирта и долили водой; потомъ вылили столько же, сколько прежде, ведеръ смѣси и снова долили водой. Тогда въ чанѣ осталось спирту втрое меньше, чѣмъ воды. Вмѣстимость чана 40 ведеръ. Сколько спирту вылито въ первый и во второй разъ?

197. Отданъ въ банкъ капиталъ и черезъ годъ получено прибыли 120 рублей; капиталъ съ процентами былъ оставленъ въ банкѣ еще на годъ. Послѣ этого капиталъ съ наросшими процентами составлялъ 2646 рублей. Какъ великъ капиталъ, внесенный въ банкъ?

197. Употребивъ свой капиталъ на нѣкоторое предпріятіе, купецъ получилъ 240 рублей прибыли; увеличенный такимъ образомъ капиталъ онъ пустилъ въ другой торговый оборотъ, который былъ выгоднѣе предыдущаго на 20%. Сколько употребилъ купецъ на первый торговый оборотъ, если послѣ второго оборота было получено 3432 рубля?

198. Двое составили капиталъ въ 200 рублей; доля перваго находилась въ оборотѣ 10 мѣсяцевъ, а доля второго 15 мѣсяцевъ. По окончанiи дѣла первый получилъ 130 рублей, а второй 90 руб.. Сколько внесъ каждый?

198. Двое составили капиталъ въ 500 рублей; доля перваго находилась въ оборотѣ 15 мѣсяцевъ, а доля второго 6 мѣсяцевъ. По окончанiи дѣла они получили по 450 рублей. Сколько внесъ каждый?

199. Сосудъ въ 20 ведеръ вмѣстимости наполненъ спиртомъ. Изъ него отливаютъ нѣкоторое количество жидкости въ другой сосудъ, равный ему, и, дополнивъ остальную часть второго сосуда водою, дополняютъ этой смѣсью первый сосудъ. Затѣмъ изъ перваго сосуда отливаютъ $6^2/_3$ ведеръ во второй; послѣ этого оба сосуда содержатъ одинаковое количество спирта. Сколько отлито первоначально спирта изъ перваго сосуда во второй?

199. Сосудъ въ 30 ведеръ вмѣстимости наполненъ спиртомъ. Изъ него отливаютъ нѣкоторое количество жидкости въ другой сосудъ, равный ему, и, дополнивъ остальную часть второго сосуда водою, дополняютъ этой смѣсью первый сосудъ. Затѣмъ изъ перваго сосуда отливаютъ 12 ведеръ во второй; послѣ этого въ первомъ сосудѣ оказывается спирта на 2 ведра меньше, чѣмъ во второмъ. Сколько отлито первоначально спирта изъ перваго сосуда во второй?

200. На разстоянiи 36 аршинъ переднее колесо экипажа дѣлаетъ 6-ю оборотами больше задняго. Если бы окружность каждаго колеса увеличилась на аршинъ, то на томъ же разстоянiи переднее колесо дѣлало бы только 3-мя оборотами больше задняго. Опредѣлить длину окружности каждаго колеса.

200. На разстоянiи 120 футовъ переднее колесо кареты дѣлаетъ на 2 оборота больше задняго. Если бы окружность передняго колеса уменьшить на 4 фута, а задняго увеличить на 5 футовъ, то на томъ же разстоянiи переднее колесо сдѣлало бы на 9 оборотовъ больше задняго. Какъ велика окружность каждаго колеса?

§ 5. Возведенiе уравненiй въ степень и извлеченiе изъ нихъ корня.

Отъ возведенiя обѣихъ частей уравненiя въ одну и ту же степень получается новое уравненiе, вообще говоря, несовмѣстное съ прежнимъ, потому что это новое уравненiе удовлетворяется не только всѣми корнями прежняго уравненiя, но содержитъ еще лишнiе корни, принадлежащiе особому уравненiю, дополнительному къ данному.

Такъ, если уравненіе $A=B$ возведемъ въ квадратъ, то получимъ новое уравненіе $A^2=B^2$, которое можемъ замѣнить черезъ $A^2-B^2=0$, а послѣднее разлагается на уравненіе $A-B=0$, или $A=B$ (данное) и уравненіе $A+B=0$, или $A=-B$ (дополнительное).

Если уравненіе $A=B$ возведемъ въ кубъ, то получимъ новое уравненіе $A^3=B^3$, или $A^3-B^3=0$. Но послѣднее, будучи написано въ видѣ $(A-B)(A^2+AB+B^2)=0$, разлагается на уравненіе $A-B=0$, или $A=B$ (данное) и уравненіе $A^2+AB+B^2=0$ (дополнительное).

То же замѣчаніе относится и къ возведенію въ другія, высшія степени.

Возвести нижеуказанныя уравненія въ квадраты и опредѣлить лишнія, внесенныя этимъ дѣйствіемъ, рѣшенія:

201. $x=2$ 201. $x=-3$ **202.** $2x=-3$ 202. $5x=2$

203. $x-5=0$ 203. $x+2=0$ **204.** $x+4=1$ 204. $x-3=1$

205. $x-7=-4x$ 205. $x+4=-9x$

206. $x+\frac{13}{5}=-\frac{1}{10}$ 206. $x-\frac{11}{4}=-\frac{3}{8}$

207. $2x-5=6x$ 207. $3x+4=7x$

208. $5x+\frac{3}{4}=-\frac{5}{2}+2x$ 208. $4x-\frac{7}{3}=-\frac{5}{6}+x$

209. $ax+c=bx$ 209. $ax-c=bx$

210. $ax+b=cx-d$ 210. $ax-b=cx+d$

Возвести нижеуказанныя уравненія въ кубъ, опредѣлить лишнія рѣшенія и провѣрить эти рѣшенія подстановкой ихъ въ уравненія, получаемыя отъ возведенія въ кубъ данныхъ уравненій:

211. $x=1$ 211. $x=-1$ **212.** $x=-2$ 212. $x=2$

213. $2x=3$ 213. $2x=-3$ **214.** $3x=-4$ 214. $3x=4$

215. $x+2=1$ 215. $x+1=2$

216. $2x-3=x$ 216. $2x+3=x$

217. $x=a$ 217. $x=-a$ **218.** $x-b=a$ 218. $x+b=a$

219. $ax=-b$ 219. $ax=b$ **220.** $ax-b=cx$ 220. $ax+b=cx$

Изъ вышеприведенной теоремы о возведеніи уравненія въ степень видно, что, при извлеченіи корня изъ обѣихъ частей уравненія, число рѣшеній этого уравненія уменьшается, и потому для возстановленія общности даннаго уравненія нужно разсматривать не только то уравненіе, которое получается изъ даннаго непосредственнымъ извлеченіемъ корня, но и уравненіе, дополнительное къ получаемому.

Такъ, извлекая квадратный корень изъ уравненія $A^2=B^2$, нужно разсматривать не только уравненіе $A=B$, но и дополнительное къ нему $A=-B$.

Извлекая кубическій корень изъ уравненія $A^3=B^3$, нужно выражать рѣшеніе уравненіемъ $A=B$ и еще дополнительнымъ къ нему уравненіемъ $A^2+AB+B^2=0$.

То же относится и къ извлеченію корней съ высшими показателями.

Рѣшить нижеслѣдующія уравненія посредствомъ извлеченія квадратнаго корня:

221. $x^2=9$ 221. $x^2=25$ **222.** $x^2=-4$ 222. $x^2=-9$

223. $x^2+a^2=0$ 223. $x^2-a^2=0$ **224.** $x^2-a^2=b^2$ 224. $x^2+a^2=-b^2$

225. $14x-x^2=33$ 225. $x^2-6x=-13$

226. $(x-1)(x-2)=6$ 226. $(x+2)(x-6)=9$

227. $x^2-2ax+a^2=b^2$ 227. $x^2+2bx+b^2=a^2$

228. $2x^2-2x=\frac{3}{2}$ 228. $3x^2+x=\frac{2}{3}$

229. $bx^2-(a-b)x=a$ 229. $ax^2+(b-a)x=b$

230. $(4x-3)^2=8x$ 230. $(3x+2)^2=25x$

Рѣшить нижеслѣдующія уравненія посредствомъ извлеченія кубическаго корня:

231. $x^3=-1$ 231. $x^3=1$ **232.** $x^3=8$ 232. $x^3=-8$

233. $x^3+27=0$ 233. $x^3-64=0$ **234.** $x^3-a^3=0$ 234. $x^3+a^3=0$

Рѣшить уравненія:

235. $x^4-16=0$ 235. $x^4-81=0$

236. $x^4+81=0$ 236. $x^4+16=0$

237. $x^6-64=0$ 237. $x^6-729=0$

238. $x^6+729=0$ 238. $x^6+64=0$

239. $b^8x^8-a^8=0$ 239. $a^8x^8-b^8=0$

240. $a^8x^8+b^8=0$ 240. $b^8x^8+a^8=0$

§ 6. Рѣшеніе ирраціональныхъ уравненій.

Ирраціональнымъ уравненіемъ называется такое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное входитъ между прочимъ подъ знакомъ корня. Для рѣшенія такого уравненія нужно замѣнить его другимъ, не содержащимъ корней изъ неизвѣстныхъ выраженій. Это достигается посредствомъ возведенія въ степень, примѣняемаго одинъ разъ или нѣсколько разъ послѣдовательно. Прежде, чѣмъ возводить уравненіе въ степень, нужно стараться упростить его,

какъ только возможно. Притомъ для успѣшности возведенія въ степень нужно отдѣлить уничтожаемый корень въ одну часть уравненія такъ, чтобы онъ входилъ множителемъ или дѣлителемъ одночленнаго выраженія.

Такъ какъ возведеніе въ степень вноситъ постороннія рѣшенія то, разрѣшивъ ирраціональное уравненіе, нужно провѣрить каждый изъ корней подстановкой его въ то изъ уравненій, которое первоначально возводилось въ степень. Если окажется, что испытуемый корень не удовлетворяетъ провѣряемому уравненію, то онъ и не будетъ корнемъ даннаго уравненія, а долженъ принадлежать одному изъ дополнительныхъ уравненій, которыхъ всегда будетъ столько, сколько разъ при рѣшеніи производилось возведеніе въ степень. Составить эти дополнительныя уравненія легко.

Ирраціональныя уравненія могутъ иногда совсѣмъ не имѣть никакихъ рѣшеній, т.-е. могутъ быть совершенно невозможными. Напр., уравненіе $3-\sqrt{x}=4$ имѣетъ одинъ только корень $x=1$, но и этотъ корень удовлетворяетъ не данному уравненію, а дополнительному къ нему $3+\sqrt{x}=4$.

241. $5+\sqrt{6-x}=7$

242. $\sqrt{5+\sqrt{x-4}}=3$

243. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$

244. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+2}=8$

245. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$

246. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

247. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

248. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$

249. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}}=1+x$

250. $x=2+\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}$

251. $\frac{2}{x}+2=\sqrt{4+\frac{1}{x}\sqrt{64+\frac{144}{x^2}}}$

252. $1-\frac{1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}}$

253. $\frac{5}{x+\sqrt{5+x^2}}-\frac{5}{x-\sqrt{5+x^2}}=6$

254. $\frac{4}{x+\sqrt{4-x^2}}+\frac{4}{x-\sqrt{4-x^2}}=\frac{12}{7}$

255. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$

241. $x+\sqrt{16x+x^2}=8$

242. $\sqrt{17-\sqrt{x-8}}=4$

243. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}-1$

244. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-3}=10$

245. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$

246. $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+1}=-2$

247. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5\sqrt{x}$

248. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}$

249. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$

250. $x=1-\sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$

251. $\frac{3+x}{3x}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}}$

252. $\frac{1}{2}-\frac{6}{x}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{2}{x}\sqrt{9-\frac{72}{x}}}$

253. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{\ldots}}{x^2}$

254. $\frac{5}{x+\sqrt{5-x^2}}+\frac{5}{x-\sqrt{5-x^2}}=\frac{2\ldots}{3}$

255. $\frac{5x-1}{\sqrt{5x}+1}=1+\frac{\sqrt{5x}-1}{2}$ —

256. $\sqrt{5x}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{3x+1}$ 256. $\sqrt{7x+4}-\frac{2x}{\sqrt{4x-3}}=\sqrt{4x-3}$

257. $\frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x-1}}=2$ 257. $\frac{\sqrt{2x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x^2-2}-\sqrt{x+1}}=3$

258. $\frac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2x+1}}=\frac{2}{5}$ 258. $\frac{\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x^2-7}-\sqrt{x-3}}=\frac{3}{2}$

259. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

259. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt{1-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}$

260. $\frac{x+1-\sqrt{2x+1}}{x+1+\sqrt{2x+1}}=\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}$ 260. $\frac{x+1+\sqrt{2x+x^2}}{x+1-\sqrt{2x+x^2}}=\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$

261. $x+\sqrt{2ax+x^2}=a$ 261. $2a-\sqrt{2ax+x^2}=x$

262. $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$ 262. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}$

263. $\sqrt{3x+a+2b}-\sqrt{3x+a-2b}=2\sqrt{x-a}$

263. $\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}=2\sqrt{x+a}$

264. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$

264. $\sqrt{ax-b}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{(a+d)x-(b+c)}$

265. $\sqrt{a+x}+\sqrt{2a+x}=\frac{a}{\sqrt{a+x}}$ 265. $\sqrt{a-x}+\sqrt{2a-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}}$

266. $\sqrt{a+\sqrt{x}}-\sqrt{a-\sqrt{x}}=\sqrt{a}$ 266. $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}=2\sqrt{\frac{5a}{6}}$

267. $\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-\sqrt{\frac{4}{a^2x^2}-\frac{7}{x^4}}}$ 267. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{4}{ax}+\frac{9}{x^2}}}$

268. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}$ 268. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=\frac{b}{x}$

269. $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax}}{1+\sqrt{ax-b}}=\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax}}{1-\sqrt{ax-b}}$

269. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{b+2x}+\sqrt{b-x}}=\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{b+2x}-\sqrt{b-x}}$

270. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-b}}$

270. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a+x}}=\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{b-x}}{\sqrt{b-x}}$

ОТДѢЛЕНІЕ X.

УРАВНЕНІЯ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

§ 1. Уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Общій видъ уравненія третьей степени есть $ax^3+bx^2+cx+d=0$ Если раздѣлимъ обѣ части уравненія на a, то получимъ приведенное уравненіе, которое пишется въ видѣ $x^3+px^2+qx+r=0$. Точно также уравненіе четвертой степени обозначается въ общемъ видѣ черезъ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, а въ приведенномъ черезъ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Вообще такъ называемыя цѣлыя алгебраическія уравненія всегда пишутся такъ, что въ первую часть переносятся всѣ члены, а потому второй частью уравненія всегда служитъ нуль.

Всякое цѣлое алгебраическое уравненіе должно имѣть корень хотя бы мнимый. Это строго доказывается въ высшей алгебрѣ для уравненія какой угодно степени. Достаточно знать это основное положеніе, чтобы вывести изъ него рядъ важныхъ слѣдствій.

Возьмемъ приведенное уравненіе третьей степени x^3+px^2+qx+ $+r=0$ и положимъ. что нѣкоторое количество α есть корень его т.-е., что подстановка α въ уравненіе обращаетъ первую часть въ нуль или получается тождество $\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$. Если станемъ непосредственно дѣлить x^3+px^2+qx+r на $x-\alpha$, то легко убѣдимся въ томъ, что въ частномъ получится трехчленъ второй степени вида $x^2+(\alpha+p)x+(\alpha^2+p\alpha+q)$, который мы обозначимъ для краткости черезъ x^2+hx+k, а въ остаткѣ получится выраженіе $\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r$ т.-е. 0. Отсюда видимъ, что первая часть уравненія всегда дѣлится нацѣло на разность между x и корнемъ. Поэтому уравненіе можно написать такъ $(x-\alpha)(x^2+hx+k)=0$. Если же положимъ, что корни трехчлена x^2+hx+k, которыхъ должно быть два, суть β и γ, то это же уравненіе напишется въ видѣ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ и окажется, во-первыхъ, что всѣ эти три количества α, β и γ суть корни данного уравненія третьей степени, а во-вторыхъ, что первая часть уравненія разлагается въ произведеніе трехъ разностей между x и

корнями. Какъ частное слѣдствіе изъ этого, выходитъ, что извѣстный членъ даннаго приведеннаго уравненія, т.-е. r, долженъ быть равенъ произведенію корней, взятому съ обратнымъ знакомъ, т.-е $r=-\alpha\beta\gamma$.

Подобнымъ же образомъ разсуждаемъ надъ уравненіемъ четвертой степени. Возьмемъ приведенное уравненіе $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ и положимъ, что α есть корень его. Если раздѣлимъ первую часть уравненія на $x-\alpha$, то получимъ въ частномъ четырехчленъ третьей степени, который обозначимъ для краткости черезъ x^3+hx^2+kx+l а въ остаткѣ выраженіе $\alpha^4+p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s$, т. е. 0. Слѣдовательно первая часть даннаго уравненія дѣлится нацѣло на $x-\alpha$ и самое уравненіе можно написать въ видѣ $(x-\alpha)(x^3+hx^2+kx+l)=0$.

Но такъ какъ по предыдущему четырехчленъ третьей степени имѣетъ три корня и разлагается въ произведеніе разностей между x и корнями, то, назвавъ корни четырехчлена черезъ β, γ и δ, напишемъ данное уравненіе въ видѣ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$, и тогда окажется, во-первыхъ, что всѣ четыре количества α, β, γ и δ суть корни даннаго уравненія четвертой степени и, во-вторыхъ что первая часть уравненія разлагается въ произведеніе четырехъ разностей между x и корнями. Замѣтимъ еще частное слѣдствіе, что извѣстный членъ даннаго приведеннаго уравненія, т. е. s, равенъ произведенію корней съ тѣмъ же знакомъ, т. е. $s=\alpha\beta\gamma\delta$.

Такимъ образомъ всякое цѣлое алгебраическое уравненіе имѣетъ столько корней, сколько единицъ въ показателѣ его степени. Въ частныхъ случаяхъ нѣкоторые изъ корней могутъ быть равными и тогда число отдѣльныхъ рѣшеній становится меньше.

При рѣшеніи уравненій высшихъ степеней проще всего опредѣляются цѣлые корни, если они есть, затѣмъ дробные, если они также имѣются, затѣмъ несоизмѣримые, которыхъ также можетъ не быть, и наконецъ мнимые. Вообще рѣшеніе такихъ уравненій настолько затруднительно, что даже въ высшей алгебрѣ разсматривается только общее рѣшеніе уравненій третьей и четвертой степени, а для уравненій высшихъ степеней извѣстны лишь способы приближеннаго отысканія числовыхъ корней.

Объ отысканіи цѣлыхъ корней замѣтимъ слѣдующее: если дано приведенное уравненіе третьей степени $x^3+px^2+qx+r=0$, то цѣлыми корнями его могутъ быть только цѣлые дѣлители, положительные или отрицательные, извѣстнаго члена r. Число этихъ дѣлителей ограничено. Ихъ можно найти всѣ, и, начиная съ простѣйшихъ, можно прямо пробовать подставлять въ уравненіе. Если найдется такой дѣлитель α, который удовлетворитъ уравненію, то найдется, слѣдовательно, одинъ цѣлый корень уравненія, а затѣмъ, раздѣливъ первую часть уравненія на $x-\alpha$, мы найдемъ въ частномъ то выраженіе вида x^2+hx+k, о которомъ говорилось выше, и, приравнявъ это выраженіе нулю, составимъ вспомогательное

квадратное уравненіе, изъ котораго опредѣляются остальные два корня даннаго уравненія.

Примѣръ. Дано уравненіе $x^3-2x+4=0$. Дѣлители извѣстнаго члена суть ±1, ±2. ±4. Подставляя $+1$, -1, $+2$, -2, находимъ, что -2 удовлетворяетъ уравненію. Поэтому $x_1=-2$. Дѣлимъ первую часть даннаго уравненія на $x+2$ и частное, получаемое при этомъ, приравниваемъ нулю. Составимъ уравненіе $x^2-2x+2-0$, рѣшая которое, получимъ $x_2=1+i$ и $x_3=1-i$.

Подобнымъ же образомъ, если въ уравненіи четвертой степени $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ найдемъ цѣлый корень $x=\alpha$, то приведемъ рѣшеніе къ уравненію третьей степени вида $x^3+hx^2+kx+l-0$, чѣмъ по крайней мѣрѣ достигнемъ пониженія степени. Если же въ уравненіи четвертой степени имѣются два цѣлыхъ корня $x=\alpha$ и $x=\beta$, то можемъ вполнѣ разрѣшить данное уравненіе такъ: перемножимъ разности $x-\alpha$ и $x-\beta$ и на полученный трехчленъ второй степени раздѣлимъ первую часть уравненія. Дѣленіе совершится нацѣло и въ частномъ получится нѣкоторый трехчленъ x^2+mx+n, приравнивая который нулю, мы составимъ вспомогательное уравненіе, содержащее остальные корни $x=\gamma$ и $x=\delta$.

Примѣръ. Дано уравненіе $x^4+6x^3+6x^2-23x-42=0$. Дѣлители извѣстнаго члена суть ±1, ±2, ±3, ±7, ±6, ±14. ±21. ±42. Подставляя ихъ по очереди, найдемъ, что цѣлые корни даннаго уравненія суть x_1-2 и $x_2=-3$. Отыскавъ второй изъ нихъ, прекращаемъ подстановку. Перемножаемъ $(x-2)(x+3)$. Получимъ x^2+x-6. Дѣлимъ первую часть даннаго уравненія на предыдущій трехчленъ и частное приравниваемъ нулю. Составимъ уравненіе $x^2+5x+7=0$, рѣшая которое, найдемъ $x_{3,4}-\frac{1}{2}\left(-5\pm\sqrt{3}\,.\,i\right)$.

1. x^3-3x-2	1. x^3+4-3x^2
2. $x^3+6=7x$	2. $x^3+12-13x$
3. $x^3+x^2=x+1$	3. x^3-x^2-x-1
4. $x^3-5x^2=x-5$	4. $x^3+2x^2=4x+8$
5. $x^3+2x^2-2x+3=0$	5. $x^3-4x^2-4x-5-0$
6. $x^3+8x^2+15x+18-0$	6. $x^3+6x^2+13x+20=0$
7. $x^4+x^3=-2x+4$	7. x^4-2x^3-6x+9
8. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$	8. $x^4-2x^3-13x^2+14x+24-0$
9. $x^4-2x^3-8x^2+19x-6=0$	9. $x^4-8x^3+12x^2+17x-4=0$
10. $x^4+4x^3-22x^2-100x-75=0$	10. $x^4-3x^3-19x^2+27x+90-0$

Приведенное уравненіе, въ которомъ всѣ коэффиціенты суть цѣлыя количества, не можетъ имѣть дробныхъ корней. Въ этомъ легко убѣдиться слѣдующимъ разсужденіемъ: возьмемъ, напр., уравненіе третьей степени и напишемъ его въ видѣ $x^3=-px^2-qx-r$. Если

допустимъ, что нѣкоторая несократимая дробь $\frac{\alpha}{\beta}$ удовлетворяетъ уравненію, то, подставляя и уничтожая знаменателя во второй части получимъ равенство $\frac{\alpha^3}{\beta} = \quad p\alpha^2 - q\alpha\beta \quad r\beta^2$, которое должно быть тождествомъ. Но это равенство невозможно, потому что первая часть его есть навѣрно дробное количество, а вторая навѣрно цѣлое количество. Повторивъ то же съ уравненіемъ четвертой степени, нашли бы также невозможное равенство $\frac{\alpha^4}{\beta} = \quad p\alpha^3 - q\alpha^2\beta \quad r\alpha\beta^2 - s\beta^3$.

Всякое общее уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами можно преобразовать въ такое приведенное, котораго коэффиціенты суть также цѣлыя количества. Возьмемъ, напр., уравненіе $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Положимъ $x=\frac{z}{a}$, гдѣ z есть новое неизвѣстное. Сдѣлавъ подстановку и замѣтивъ, что въ первомъ членѣ a сократится, получимъ, по уничтоженіи знаменателя, уравненіе $z^3+bz^2+acz+a^2d=0$, которое есть приведенное и имѣетъ цѣлые коэффиціенты. Подобно этому уравненіе четвертой степени $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ посредствомъ той же подстановки $x=\frac{z}{a}$ преобразуется въ уравненіе $z^4+bz^3+acz^2+a^2dz+a^3e=0$.

Изъ предыдущихъ указаній видно, что въ уравненіяхъ приведеннаго вида можно искать только цѣлые корни. Въ уравненіяхъ же общаго вида могутъ быть и цѣлые, и дробные. Разысканіе цѣлыхъ корней дѣлается подстановками по прежде указанному способу. При этомъ нужно замѣтить, что въ уравненіи третьей степени произведеніе корней равно отрицательному отношенію послѣдняго коэффиціента къ первому, т. е. $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$, а въ уравненіи четвертой степени оно равно положительному подобному отношенію, т.-е. $\alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}$. Значитъ, и въ общемъ уравненіи цѣлые корни суть дѣлители послѣдняго коэффиціента. Что же касается дробныхъ корней, то изъ результата, къ которому приводитъ вышеуказанная подстановка $x=\frac{z}{a}$, видно, что корнями уравненія могутъ быть только такія дроби, которыхъ знаменатели суть дѣлители перваго коэффиціента. Притомъ видно, что разысканіе дробныхъ корней вполнѣ приводится къ разысканію цѣлыхъ корней того приведеннаго уравненія, которое получается изъ даннаго посредствомъ указанной подстановки.

Такъ какъ послѣдній членъ уравненія можетъ имѣть много дѣлителей и эти дѣлители сами по себѣ могутъ быть большими числами, то для ограниченія дробныхъ подстановокъ полезно отыски-

вать такъ называемые предѣлы положительныхъ и отрицательныхъ корней. Предѣлъ положительныхъ корней есть такое положительное количество, которое больше каждаго положительнаго корня даннаго уравненія. Возьмемъ уравненіе $2x^3+7x^2+9x-36=0$. Первая часть его дѣлается положительной при $x=2$ и при дальнѣйшемъ увеличеніи x будетъ и подавно положительной. Поэтому положительные корни, которые должны обращать первую часть въ нуль должны быть меньше 2. Такъ какъ, испытавъ 1, видимъ, что она не удовлетворяетъ уравненію, то нужно прямо перейти къ отысканію дробныхъ корней. Для этого полагаемъ $x=\frac{z}{2}$. Получимъ уравненіе $z^3+7z^2+18z-144=0$. Положительные корни этого уравненія меньше 4, потому что, начиная съ этого числа, подстановка обращаетъ первую часть въ положительныя количества. Подставляя только 1 и 3, находимъ, что 3 есть корень. Слѣдовательно, данное ур-іе имѣетъ корень $x_1=\frac{3}{2}$. Раздѣливъ первую часть на разность между x и найденнымъ корнемъ, или, вмѣсто этого, на двучленъ $2x-3$. составимъ еще уравненіе $x^2+5x+12=0$, которое дастъ остальные корни $x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-5\pm\sqrt{23}.i\right)$.

Предѣлъ отрицательныхъ корней есть такое отрицательное количество, которое въ алгебраическомъ смыслѣ меньше каждаго отрицательнаго корня даннаго уравненія, т.-е. имѣетъ числовую величину большую, чѣмъ числовая величина каждаго отрицательнаго корня. Отысканіе предѣловъ отрицательныхъ корней приводится къ отысканію предѣловъ положительныхъ, потому что всякое уравненіе посредствомъ подстановки $x=-z$ приводится къ такому, корни котораго противоположны по знаку корнямъ даннаго. Положимъ, что дано уравненіе $6x^4+67x^3+132x^2+90x+20=0$. Оно очевидно совсѣмъ не имѣетъ положительныхъ корней. Положивъ $x=-z$, получимъ уравненіе $6z^4-67z^3+132z^2-90z+20=0$. Представивъ его для облегченія вычисленія въ видѣ $z^3(6z-67)+z(133z-$ $-90)+20=0$, видимъ, что, начиная съ $z=11$, первая часть уже наглядно становится постоянно положительной. На самомъ же дѣлѣ постоянство положительнаго значенія обнаруживается и раньше. Поэтому испытываемъ только дѣлителей послѣдняго члена 1, 2 и 5 и убѣждаемся, что уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Переходя къ отысканію дробныхъ корней, положимъ $z=\frac{u}{6}$. Получится уравненіе $u^4-67u^3+792u^2-3240u+4320=0$. Ему удовлетворяютъ корни 3 и 4. Поэтому данное уравненіе имѣетъ корни $x_1=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$ и $x_2=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$. Раздѣливъ первую часть даннаго уравненія на произведеніе разностей между x и корнями, или, вмѣсто него, на

произведеніе $(2x+1)(3x+2)$, т.-е. $6x^2+7x+2$, составимъ еще уравненіе $x^2+10x+10=0$, изъ котораго найдемъ остальные корни $x_{3,4}=-5\pm\sqrt{15}$.

Изъ приведенныхъ разъясненій видно, что отысканіе по общимъ способамъ даже простѣйшихъ, именно соизмѣримыхъ корней уравненій представляетъ значительныя трудности. Поэтому важно замѣтить нѣкоторыя, хотя бы и очень исключительныя формы уравненій высшихъ степеней, рѣшеніе которыхъ доступно средствамъ начальной алгебры.

Простѣйшее изъ уравненій высшихъ степеней есть уравненіе 4-й степени вида $ax^4+bx^2+c=0$. Оно называется биквадратнымъ. Рѣшеніе его выполняется такъ: Полагаемъ $x^2=z$. Тогда получимъ квадратное уравненіе $az^2+bz+c=0$. Рѣшивъ его, найдемъ два корня z_1 и z_2. Послѣ этого вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ неполныхъ квадратныхъ уравненій $x^2=z_1$ и $x^2=z_2$. Изъ послѣднихъ находимъ всѣ 4 корня даннаго уравненія и видимъ, между прочимъ, что эти корни попарно равно-противоположны.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе $x^4-13x^2+36=0$. Полагая $x^2=z$, получимъ квадратное уравненіе $z^2-13z+36=0$, откуда $z_1=4$ и $z_2=9$. Далѣе изъ уравненій $x^2=z_1$, и $x^2=z_2$ находимъ $x=\pm\sqrt{4}$ и $x=\pm\sqrt{9}$, или $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$ и $x_4=-3$.

11. $x^4-5x^2+4=0$ — 11. $x^4+12x^2-64=0$

12. $x^4+12x^2+32=0$ — 12. $x^4+9x^2+20=0$

13. $5x^4+x^2-4=0$ — 13. $3x^4-x^2-2=0$

14. $12x^4+x^2-6=0$ — 14. $6x^4-x^2-15=0$

Подобно биквадратному рѣшаются вообще такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ въ двухъ группахъ членовъ, при чемъ одна группа представляетъ квадратъ другой, или отличается отъ квадрата другой нѣкоторымъ извѣстнымъ множителемъ или дѣлителемъ.

15. $(x^2-x)^2-(x^2-x)=2$ — 15. $(x^2+x)^2-(x^2+x)=6$

16. $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=24$ — 16. $(x^2-5x)^2+5(x^2-5x)=36$

Подъ такой видъ подходятъ иногда ирраціональныя уравненія. Въ этихъ случаяхъ необходимое для такихъ уравненій возведеніе въ степень отлагается до конца вычисленія, что очень удобно.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$. Его можно представить въ видѣ $x^2-3x+5+\sqrt{x^2-3x+5}=12$ Полагая затѣмъ $\sqrt{x^2-3x+5}=z$, получимъ квадратное уравненіе $z^2+z-12=0$. Корни послѣдняго суть $z_1=3$ и $z_2=-4$. Эти два рѣшенія умѣстны лишь тогда, когда по условіямъ вопроса корень $\sqrt{x^2-3x+5}$ мо-

жетъ быть взятъ въ уравненіи съ двойнымъ знакомъ$\pm$. Если же значеніе этого корня принимается въ смыслѣ абсолютнаго числа, то возможно лишь рѣшеніе $\sqrt{x^2-3x+5}=3$, которое даетъ затѣмъ $x_1=4$ и $x_2=-1$.

17. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$ 17. $2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$

18. $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$ 18. $\sqrt{1+3x}+2=3\sqrt[4]{1+3x}$

19. $x^2+\sqrt{x^2-9}=21$ 19. $x^2+\sqrt{x^2+5}=15$

20. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$ 20. $2x^2-3x-\sqrt{2x^2-3x+2}=4$

Легко рѣшается такъ называемое возвратное уравненіе $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, въ которомъ коэффиціенты членовъ, равно удаленныхъ отъ начала и конца многочлена, равны.

Для рѣшенія дѣлятъ его на x^2, отчего получится $ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$, затѣмъ соединяютъ попарно члены съ одинакими коэффиціентами, такъ что уравненіе принимаетъ видъ $a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c=0$, и наконецъ полагаютъ $x+\frac{1}{x}=z$, при чемъ $x^2+\frac{1}{x^2}$ замѣняется черезъ z^2-2 и получается квадратное уравненіе $az^2+bz+c-2a=0$. Рѣшивъ послѣднее, получимъ два корня z_1 и z_2. Послѣ этого вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій $x^2-z_1x+1=0$ и $x^2-z_2x+1=0$, вытекающихъ изъ уравненія подстановки и показывающихъ, между прочимъ, что 4 корня возвратнаго уравненія должны быть попарно взаимно обратными, такъ какъ произведенія ихъ по два равны единицѣ.

21. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$

21. $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

22. $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$

22. $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$

Подобно этому рѣшается уравненіе $ax^4\pm bx^3+cx^2\pm bx+a=0$, отличающееся отъ возвратнаго знакомъ одного коэффиціента.

Въ этомъ случаѣ употребляется подстановка $x-\frac{1}{x}=z$.

23. $4x^4-33x^3+33x+4=0$

23. $6x^4+73x^3-73x+6=0$.

24. $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$.

24. $15x^4-16x^3-30x^2+16x+15=0$

Неполныя уравненія вида $ax^4\pm bx^3\pm bx-a=0$, сходныя съ возвратными, легко рѣшаются посредствомъ разложенія первой части на множителей.

25. $2x^4-5x^3+5x-2=0$
25. $3x^4-10x^3+10x-3=0$
26. $6x^4-5x^3-5x-6=0$
26. $12x^4+7x^3+7x-12=0$

Возвратное уравненіе пятой степени $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ имѣетъ корень -1 и по удаленіи изъ первой части множителя $x+1$ что дѣлается удобно выводомъ его за скобку, приводится къ возвратному уравненію четвертой степени.

Подобно этому рѣшается уравненіе $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$ имѣющее корень 1.

27. $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$
27. $4x^5+12x^4+11x^3+11x^2+12x+4=0$
28. $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0$
28. $12x^5-56x^4+107x^3-107x^2+56x-12=0$

Уравненіе шестой степени $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$ т.-е. возвратное, или $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3-cx^2+bx-a=0$, т.-е. сходное съ возвратнымъ, рѣшаются, подобно такимъ же уравненіямъ четвертой степени, дѣленіемъ на x^3 и подстановкой въ первомъ случаѣ $x+\frac{1}{x}=z$, а во второмъ $x-\frac{1}{x}=z$, при чемъ оказывается, что $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})=z(z^2-3)$, а съ другой стороны $x^3-\frac{1}{x^3}=$ $=(x-\frac{1}{x})(x^2+1+\frac{1}{x^2})=z(z^2+3)$, вслѣдствіе чего получается въ результатѣ уравненіе третьей степени.

29. $x^6-10x^5+27x^4-20x^3+27x^2-10x+1=0$
29. $x^6+3x^5-7x^4+6x^3-7x^2+3x+1=0$
30. $2x^6-x^5-8x^4+8x^2+x-2=0$
30. $3x^6+4x^5-17x^4+17x^2-4x-3=0$

Къ числу уравненій, вообще говоря, легко разрѣшаемыхъ, принадлежатъ еще двучленныя уравненія вида $x^n-a=0$ и $x^n+a=0$, въ которыхъ a есть абсолютное число. Для рѣшенія такихъ уравненій принимаютъ, во-первыхъ, $x=\sqrt[n]{a}.z$, вслѣдствіе чего данныя уравненія приводятся къ болѣе простымъ $z^n-1=0$ и $z^n+1=0$. Эти послѣднія при нѣсколькихъ небольшихъ значеніяхъ n рѣшаются посредствомъ разложенія первыхъ частей на множителей, а затѣмъ найденныя значенія z помножаются на $\sqrt[n]{a}$. Уравненія общаго вида $ax^n\mp b=0$ легко преобразуются въ приведенныя, посредствомъ дѣленія на коэффиціентъ a, и потому рѣшаются тѣмъ же способомъ.

31. $x^3-27=0$
31. $x^3+8=0$
32. $125x^3+8=0$
32. $125x^3-27=0$
33. $x^4-16=0$
33. $x^4+81=0$
34. $81x^4+4=0$
34. $16x^4-25=0$
35. $x^5-2=0$
35. $x^5+3=0$
36. $2x^6+3=0$
36. $3x^6-2=0$

Уравненіе вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$ приводится къ двумъ двучленнымъ посредствомъ подстановки $x^n=z$, которая обращаетъ данное уравненіе въ квадратное и позволяетъ найти два значенія z.

37. $x^6-3x^3+2=0$
37. $x^6+4x^3+3=0$
38. $(x-1)^6+16=10(x-1)^3$
38. $(x+1)^6+20=9(x+1)^3$
39. $x^{\frac{6}{5}}+8=9\sqrt[5]{x^3}$
39. $x^{\frac{6}{5}}-7=6\sqrt[5]{x^3}$
40. $(x+2)^{\frac{6}{5}}-216=19\sqrt[5]{(x+2)^3}$
40. $(x-3)^{\frac{10}{3}}-32=31\sqrt[3]{(3-x)^5}$

§ 2. Уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными

Для рѣшенія системы уравненій

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \text{ и } ax+by=c,$$

изъ которыхъ одно второй, а другое первой степени, выразимъ y черезъ x изъ второго и полученное выраженіе $y=\frac{c-ax}{b}$ подставимъ въ первое. Получится такъ называемое выводное уравненіе, квадратное, вида

$$Mx^2+Nx+P=0.$$

Рѣшивъ послѣднее, найдемъ 2 значенія x_1 и x_2, а подставивъ ихъ въ выраженіе y, получимъ соотвѣтствующія значенія y_1 и y_2. Въ результатѣ получаются двѣ системы рѣшеній.

41. $x^2-y^2=32,\ x-2y=2$
41. $x^2+y^2=41,\ y-x=1$
42. $2x^2-2xy+x=-9,\ 2y-3x=1$
42. $x^2+3xy-y^2=92,\ x+3y=18$
43. $x^2+6xy+8y^2=91,\ x+3y-10=0$
43. $2x^2+10xy+17y^2=218,\ 2x+5y-20=0$
44. $x^2+2xy-4y^2-5x+4=0,\ x-y=2$
44. $2x^2-xy+3y^2-7x-12y+1=0,\ x+1=y$

Для рѣшенія двухъ уравненій второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \text{ и } A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

исключаемъ изъ нихъ сначала квадратъ одного неизвѣстнаго, напр. y-ка. Для этого умножаемъ первое уравненіе на C_1, второе на C и вычитаемъ одно изъ другого. Получимъ вспомогательное уравненіе которое представимъ для краткости въ видѣ

$$ax^2+bxy+dx+ey+f=0.$$

Пользуясь тѣмъ, что полученное уравненіе содержитъ только первую степень y, выражаемъ изъ него y черезъ x въ раціональной формѣ $y=-\frac{ax^2+dx+f}{bx+e}$. Полученное выраженіе y вставляемъ въ одно изъ данныхъ уравненій. Тогда составится выводное уравненіе относительно одного x, четвертой степени. Если послѣднее будетъ рѣшено, то будутъ найдены 4 значенія x, а вставляя каждое изъ нихъ въ предыдущее выраженіе y черезъ x, получимъ 4 соотвѣтствующія значенія y. Слѣдовательно, всего получится четыре системы рѣшеній.

Въ случаѣ, когда квадратъ одного изъ неизвѣстныхъ не входитъ въ одно изъ уравненій, вычисленіе упрощается.

45. $x^2+3xy=18$, $xy+4y^2=7$

45. $x^2-xy+y^2=21$, $2xy-y^2=15$

46. $x+y-x^2=0$, $3y-x-y^2=0$

46. $4x-4y-xy=0$, $2x^2+2y^2-5xy=0$

47. $6x^2+xy-y^2-3x-4y=15$, $4xy-y^2-3x^2+15x-7y=18$

47. $6x+21y-2x^2-27xy-6y^2=4$, $9xy+3y^2-2x^2+6x-6y=4$

48. $3x^2+2xy+y^2=43$, $x^2+2xy+3y^2=33$

48. $3x^2-xy+4y^2=14$, $2x^2-xy+2y^2=8$

49. $x^2+xy+2y^2=74$, $2x^2+2xy+y^2=73$

49. $3x^2-4xy+2y^2=17$, $y^2-x^2=16$

50. $2x^2-5xy+2y^2=0$, $x^2-3xy+2y^2+x-5y=-6$

50. $x^2-4xy+3y^2=0$, $x^2+3xy-2y^2+x-y=18$

Такъ какъ рѣшеніе системы уравненій по объясненному выше общему способу довольно сложно, то полезно замѣтить нѣкоторые частные способы, соотвѣтствующіе особымъ формамъ уравненій. Разъяснимъ на примѣрахъ нѣкоторые изъ этихъ способовъ.

Примѣръ 1. Пусть даны уравненія $x+y=8$ и $xy=15$. Форма этихъ уравненій показываетъ, что x и y можно разсматривать, какъ корни одного квадратнаго уравненія $z^2-8z+15=0$. Корни послѣдняго суть 3 и 5. Такъ какъ каждый изъ этихъ корней можетъ быть принятъ за x и каждый за y, то данная система уравненій имѣетъ двѣ системы рѣшеній $x_1=3$, $y_1=5$ и $x_2=5$, $y_2=3$.

Подобно предыдущему можно рѣшить уравненія $x-y=3$ и $xy=10$. Нужно только принять на время $y=-z$.

Примѣръ 2. Возьмемъ уравненія $x+y=7$ и $x^2+y^2=25$. Возведя первое изъ нихъ въ квадратъ и вычтя затѣмъ второе, найдемъ произведеніе $xy=12$. Зная же сумму и произведеніе неизвѣстныхъ можемъ опредѣлить неизвѣстныя такъ, какъ показано на первомъ примѣрѣ.

Подобно этому можно рѣшить уравненія $x\quad y=2$ и $x^2+y^2=74$.

Примѣръ 3. Пусть даны уравненія $x^2-y^2=24$ и $x-y=4$. Раздѣливъ первое на второе, найдемъ уравненіе первой степени $x+y=6$, которое вмѣстѣ со вторымъ изъ данныхъ опредѣляетъ единственную систему $x_1=5$ и $y_1=1$.

Примѣръ 4. Даны уравненія $x^2+y^2+xy=84$ и $x+y+\sqrt{xy}=14$. Представивъ первое уравненіе въ видѣ $(x+y)^2-xy=84$, положимъ $x+y=z$ и $\sqrt{xy}=u$. Тогда данныя уравненія примутъ видъ

$$z^2-u^2=84 \text{ и } z+u=14.$$

Рѣшая эти уравненія такъ, какъ показано въ примѣрѣ третьемъ, получимъ $z=10$ и $u=4$. Слѣдовательно, имѣемъ $x+y=10$ и $xy=16$, а потому x и y суть корни одного квадратнаго уравненія

$$v^2-10v+16=0.$$

Рѣшивъ послѣднее, найдемъ, что данныя уравненія имѣютъ двѣ системы рѣшеній $x_1=8$, $y_1=2$ и $x_2=2$, $y_2=8$.

Примѣръ 5. Даны уравненія $x^2+y^2=25$ и $xy=12$. Умноживъ второе уравненіе на 2, придадимъ его къ первому и вычтемъ изъ перваго. Получимъ $(x+y)^2=49$ и $(x-y)^2=1$, откуда $x+y=\pm 7$ и $x+y=\pm 1$. Поэтому рѣшенія данныхъ уравненій получатся изъ слѣдующихъ системъ уравненій второй степени:

$$\begin{array}{llll} x+y=7, & x+y=7, & x+y=-7, & x+y=-7, \\ x-y=1, & x-y=-1, & x-y=1; & x-y=-1, \end{array}$$

Эти рѣшенія суть $x_1=4$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=4$; $x_3=-4$, $y_3=-3$; $x_4=-3$, $y_4=-4$.

Тѣ же уравненія можно было бы рѣшить посредствомъ особой подстановки, которую мы разъяснимъ на слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ 6. Возьмемъ уравненія $2xy-y^2=15$ и $x^2+xy=36$, которыхъ первыя части суть однородныя выраженія второй степени. Положимъ $y=ux$. Получимъ

$$x^2(2u-u^2)=15 \text{ и } x^2(1+u)=36.$$

Отсюда, опредѣляя два выраженія x^2 и сравнивая ихъ, находимъ уравненіе

$$\frac{15}{2u-u^2}=\frac{36}{1+u} \text{ или } 12u^2-19u+5=0.$$

Корни этого уравненія суть $u_1=\frac{5}{4}$ и $u_2=\frac{1}{3}$. По первому корню вычислимъ $x^2=\frac{36}{1+u}=16$, т.-е. $x=\pm 4$ и вслѣдствіе этого $y=ux=\pm 5$,

по второму корню найдемъ также $x^2=27$, т.-е. $x=\pm 3\sqrt{3}$, вслѣдствіе чего $y=\pm\sqrt{3}$. Всего получаемъ четыре системы рѣшеній.

Примѣръ 7. Опредѣлить стороны прямоугольнаго треугольника, котораго периметръ 12, а площадь 6. Назвавъ катеты черезъ x и y, а гипотенузу черезъ z, составимъ три уравненія:

$$x+y+z=12,\quad xy=12,\quad x^2+y^2=z^2.$$

Перенесемъ въ первомъ уравненіи z во вторую часть и затѣмъ возведемъ уравненіе въ квадратъ. Получимъ

$$x^2+y^2+2xy=144-24z+z^2,$$

откуда, замѣняя на основаніи двухъ другихъ уравненій x^2+y^2 черезъ z^2 и $2xy$ черезъ 24, найдемъ уравненіе, содержащее только z.

Такимъ образомъ получимъ $z=5$, а затѣмъ изъ уравненій $x+y=7$ и $xy=12$ найдемъ $x_1=4$, $y_1=3$ и $x_2=3$, $y_2=4$. Обѣ системы рѣшеній опредѣляютъ одинъ и тотъ же треугольникъ.

Примѣръ 8. Дана система такихъ уравненій:

$$x-y=2(1-z),\quad x^2-y^2=2(1-z^2),\quad 5(x^4-y^4)=13(1-z^4).$$

Ее можно замѣнить простѣйшей. Для этого, оставивъ первое уравненіе безъ измѣненія, раздѣлимъ второе на первое и третье на второе. Получится

$$x-y=2(1-z),\quad x+y=1+z,\quad 10(x^2+y^2)=13(1+z^2).$$

Помощью двухъ первыхъ уравненій выражаемъ x и y черезъ z и полученныя выраженія $x=\frac{3-z}{2}$ и $y=\frac{3z-1}{2}$ вставляемъ въ третье уравненіе, которое вслѣдствіе этого приметъ видъ $2z^2-5z+2=0$. Опредѣливъ два значенія z и вставивъ ихъ въ выраженія x и y, получимъ двѣ системы рѣшеній: $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{5}{2}$, $z_1=2$ и $x_2=\frac{5}{4}$, $y_2=\frac{1}{4}$, $z_2=\frac{1}{2}$.

Примѣръ 9. Опредѣлить члены кратной пропорціи, зная, что сумма крайнихъ 12, сумма среднихъ 9 и сумма квадратовъ всѣхъ членовъ 145. Представивъ искомую пропорцію въ видѣ $x:y=z:u$, составимъ слѣдующія уравненія:

$$x+u=12,\quad y+z=9,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=145,\quad xu=yz.$$

Для рѣшенія этихъ уравненій возведемъ два первыя изъ нихъ въ квадратъ и, сложивъ результаты, вычтемъ изъ суммы третье уравненіе. Получимъ $2(xu+uz)=80$, откуда, на основаніи четвертаго уравненія, находимъ $xu=yz=20$. Послѣ этого изъ уравненій

$$v^2-12v+20=0 \text{ и } w^2-9w+20=0$$

получимъ $x=10$, $u=2$, $y=5$, $z=4$. Четыре системы рѣшеній, которыя можно получить здѣсь, соотвѣтствуютъ четыремъ возможнымъ перемѣщеніямъ членовъ пропорціи.

Примѣръ 10. Дана система четырехъ уравненій:

$$xy=zu,\quad x+y+z+u=12,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=170,$$
$$x^3+y^3+z^3+u^3=1764.$$

Введемъ вспомогательныя неизвѣстныя, полагая

$$x+y=v,\ z+u=w \text{ и } xy=uz=t.$$

Чтобы замѣнить прежнія неизвѣстныя новыми, замѣтимъ, что $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=v^2-2t$, $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=v^3-3vt$ и что, подобнымъ же образомъ, $z^2+u^2=w^2-2t$, $z^3+u^3=w^3-3wt$. Оставляя первое изъ данныхъ уравненій, замѣнимъ три послѣднія такими:

$$v+w=12,\ v^2+w^2-4t=170,\ v^3+w^3-3t(v+w)=1764.$$

Такимъ образомъ данная система уравненій приведена къ простѣйшей. Но два послѣднія изъ полученныхъ уравненій допускаютъ дальнѣйшее упрощеніе. Замѣтимъ, что первыя части ихъ могутъ быть представлены въ видѣ $(v+w)^2-2vw-4t$ и $(v+w)^3-3vw(v+w)-$ $-3t(v+w)$, или, на основаніи перваго уравненія, въ видѣ 12^2- $-2vw-4t$ и $12^3-36vw-36t$. Приравнивая первое изъ этихъ выраженій числу 170, а второе числу 1764 и производя упрощеніе, получимъ вмѣсто прежней такую систему уравненій

$$v+w=12,\ vw+2t=-13,\ vw+t=-1.$$

Рѣшая два послѣднія изъ этихъ уравненій, найдемъ $t=-12$, $vw=11$.

Зная, что $v+w=12$ и $vw=11$, заключаемъ, что v и w суть корни квадратнаго уравненія

$$s^2-12s+11=0,$$

рѣшая которое, получимъ $v_1=1$, $w_1=11$ и $v_2=11$, $w_2=1$. Опредѣливъ v, w и t, легко по уравненіямъ $x+y=v$, $y+z=w$ и $xy=zu=t$ найти первоначальныя неизвѣстныя. Такимъ образомъ найдемъ четыре системы рѣшеній: 12,—1,4,—3; —1,12,—3,4; 4,—3,12,—1; —3,4,—1,12.

51. $x+y=12,\ xy=35$

52. $x^2+y^2=13,\ x^2-y^2=5$

53. $x^2+y^2=74,\ x+y=12$

54. $x^2-y^2=32,\ x-y=4$

55. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2},\ xy=80$

56. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,\ x+y=4$

57. $x^2+y^2=25,\ xy=12$

58. $x^2-xy+y^2=43,\ x-y=1$

59. $\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2},\ x-y=6$

60. $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=10,\ \sqrt{xy}=16$

61. $x^2-y=7,\ x^2y=18$

51. $x-y=8,\ xy=20$

52. $x^2+2y^2=33,\ 2x^2-y^2=46$

53. $x^2+y^2=34,\ x-y=2$

54. $x^2-y^2=120,\ x+y=20$

55. $\frac{x-y}{x+y}=\frac{3}{7},\ xy=10$

56. $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{6},\ x-y=1$

57. $x^2-y^2=5,\ xy=6$

58. $x^2+xy+y^2=67,\ x+y=9$

59. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\ x+y=10$

60. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2,\ \sqrt{xy}=15$

61. $x+y^2=11,\ xy^2=18$

62. $x^3 - y^3 = 37,\ x - y = 1$

63. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3},\ x^2 - y^2 = 8$

64. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18,\ x + y = 12$

65. $4x^2 + 9y^2 = 45,\ xy = 3$

66. $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{2},\ x^2 - y^2 = 3$

67. $x^3 - y^3 = 19,\ x^2y - xy^2 = 6$

68. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2},\ x^2 + y^2 = 20$

69. $x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{65}{6},\ x - y = 5$

70. $x^2 + y^2 - xy = 61, x + y - \sqrt{xy} = 7$

71. $x + y = xy = x^2 + y^2$

72. $x - y = x^2 + y^2 = x^3 - y^3$

73. $x + y = 5,\ x^4 + y^4 = 97$

74. $x - y = 3,\ x^5 - y^5 = 33$

62. $x^3 + y^3 = 65,\ x + y = 5$

63. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2},\ x^2 + y^2 = 45$

64. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 10\frac{1}{2},\ x - y = 3$

65. $25x^2 - y^2 = 36,\ xy = 16$

66. $\frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{5}{6},\ x^2 + y^2 = 13$

67. $x^3 + y^3 = 152,\ x^2y + xy^2 = 120$

68. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3},\ x^2 + y^2 = 45$

69. $x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}} = 30,\ x + y = 20$

70. $x^2 + y^2 + xy = 84. x + y - \sqrt{xy} = 6$

71. $x - y = xy = x^2 + y^2$

72. $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3$

73. $x - y = 2,\ x^4 + y^4 = 82$

74. $x + y = 2,\ x^5 + y^5 = 242$

75. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{112}{9},\ x + y = 4$

75. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{27}{4},\ x - y = 2$

76. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{23}{4},\ x - y = 1$

76. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{11}{4},\ x + y = 3$

77. $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2,\ x^2 - 8 = 2x(2y - 3)$

77. $\sqrt{\frac{4x+3y}{5y}} + \sqrt{\frac{5y}{4x+3y}} = 2,\ y^2 + 8 = 2y(x + 2)$

78. $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2},\ xy - x - y = 9$

78. $\sqrt{\frac{5x}{x-y}} - \sqrt{\frac{x-y}{5x}} = \frac{21}{10},\ xy + x + y = 11$

79. $x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y},\ x^2 + y^2 = 34$

79. $x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{30}{x-y},\ xy = 80$

80. $x+y=444,\ \sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{y+14}=12$

80\. $x-y\ \ 2,\ \sqrt[3]{x+14}-\sqrt[3]{y-21}=1$

81. $xy\ \ 12,\ xz=6,\ y^2+z^2=20$ 81. $xy=54,\ yz=36,\ x^2-z^2=2($

82. $xy\ \ 48,\ yz=54,\ zx=72$ 82. $xy=9z,\ xz=4y,\ yz=16x$

83. $xy+yz=28,\ xz+yz=30,\ xy+xz=10$

83\. $x^2+y^2=52,\ y^2+z^2=100,\ x^2+z^2=80$

84. $xy+xz+yz=27,\ x-y=6,\ y-z=3$

84\. $x^2+y^2+z^2=98,\ x-y=5,\ y+z=8$

85. $x(x+y+z)=70,\ y(x+y+z)=28,\ z(x+y+z)=98$

85\. $x(x\ \ y+z)=12,\ y(x-y+z)=9,\ z(x-y+z)=6$

86. $x+y+z=20,\ xyz=130,\ x-2y+z=5$

86\. $x-y+z=8,\ x^2+y^2+z^2=74,\ x-y+3z=22$

87. $x+y+z=12,\ xz+yz=35,\ x^2+y^2+z^2=50$

87\. $x-y+z=3,\ xz-yz=2,\ x^2-y^2+z^2=25$

88. $x+y+z=7,\ x^2+y^2+z^2=21,\ yz=x^2$

88\. $x+y+z=6,\ x^2+y^2+z^2=14,\ yz-6$

89. $x^2+y^2=z^2,\ x+y+z=30,\ xy-60$

89\. $y^2+z^2=x^2-6,\ x+y+z=8,\ yz=3$

90. $x^2+z^2-y^2=1,\ x+y+z=3,\ y^2-xz$

90\. $x^2+y^2+z^2=35,\ x-y+z=3,\ y^2=xz+4$

91. $x+y+z-13,\ x^2+y^2+z^2=61,\ 2yz=xy+xz$

91\. $x-y+z-14,\ x^2+y^2+z^2=244,\ 2z(x-y)=xy$

92. $x^2+y^2+z^2=30,\ y^2=2xz+21,\ 2x=z$

92\. $xy+xz-yz=14,\ z^2=2xy-4,\ 3x=2z$

93. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12,\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=18,\ 3y+10z=3$

93\. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6,\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=7,\ 8x-5z=1$

94. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=5,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6,\ \frac{3}{y}-\frac{1}{xz}=1$

94\. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=13,\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1,\ \frac{1}{xy}-\frac{2}{z}=0$

95. $x+y+z=6,\ xy+xz+yz=11,\ xyz=6$

95\. $x-y+z=0,\ xz-xy-yz=-31,\ xyz=30$

96. $x+y+z=0,\ xyz=30,\ x^2+y^2+z^2\ \ 38$

96\. $x+y+z=9,\ xyz=24,\ x^2+y^2+z^2=29$

97. $u+x=5,\ y+z=9,\ u+y^2=28,\ x+z^2=18$

97. $u-x=3,\ z-y=5,\ u+y^2=12,\ z^2-x=44$

98. $u+x=10,\ y-z=1,\ yz=20,\ y^2+u^2=74$

98. $u-x=5,\ x^2+z^2=52,\ xz=24,\ y^2+u^2=90$

99. $ux=yz,\ x+u=13,\ y+z=11,\ x^2+y^2+z^2+u^2=170$

99. $xy=zu,\ x+y=11,\ z-u=2,\ x^2+y^2-z^2-u^2=21$

100. $x^3+y^3+z^3+u^3=252,\ x+y=5,\ z+u=7,\ xy=uz$

100. $x^3+y^3-z^3+u^3=187,\ x+y=8,\ z-u=1,\ xy=uz.$

Въ каждой изъ нижеслѣдующихъ задачъ нужно составить и рѣшить по два уравненія съ двумя неизвѣстными.

101. Найти стороны прямоугольника, котораго периметръ равенъ 22 футамъ, а площадь 30 квадр. футамъ.

101. Найти стороны прямоугольника, котораго діагональ равна 13 футамъ, а периметръ 34 футамъ.

102. Найти катеты прямоугольнаго треугольника, зная, что отношеніе этихъ катетовъ равно $\frac{3}{4}$, а площадь треугольника равна 54 квадр. футамъ.

102. Найти катеты прямоугольнаго треугольника, зная, что гипотенуза этого треугольника равна 29 футамъ, а площадь 210 квадр. футамъ.

103. Площадь прямоугольника 112 кв. футовъ. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на смежныхъ сторонахъ прямоугольника, 260 кв. футовъ. Найти стороны.

103. Отношеніе сторонъ прямоугольника равно 6. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на этихъ сторонахъ, есть 592 кв. фута. Найти стороны.

104. Если къ произведенію двухъ чиселъ придать меньшее число, то получится 54. Если къ тому же произведенію придать большее число, то получится 56. Найти эти числа.

104. Произведеніе двухъ чиселъ на 9 меньше пятерного большаго числа и на 16 больше пятерного меньшаго числа. Найти эти числа.

105. Произведеніе цифръ двузначнаго числа въ три раза меньше самаго числа. Если къ искомому числу прибавимъ 18, то получимъ число съ тѣми же цифрами, но съ обратнымъ порядкомъ ихъ. Найти число.

105. Произведеніе цифръ двузначнаго числа въ два раза больше суммы его цифръ. Если отъ искомаго числа отнимемъ 27, то получимъ число съ тѣми же цифрами, но съ обратнымъ порядкомъ ихъ. Найти число.

106. Произведеніе двухъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ въ три раза больше суммы ихъ, а сумма квадратовъ тѣхъ же чиселъ равна 160. Найти эти числа.

106. Произведеніе двухъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ въ 10 разъ больше ихъ разности, а сумма квадратовъ тѣхъ же чиселъ равна 125. Найти эти числа.

107. Высота трапеціи равна 18 футамъ; площадь ея равновелика площади прямоугольника, построеннаго на основаніяхъ трапеціи тройное верхнее основаніе, сложенное съ нижнимъ, въ 4 раза больше высоты. Опредѣлить основанія.

107. Площадь трапеціи равновелика площади прямоугольника, построеннаго на основаніяхъ трапеціи; разность основаній равна 16 футамъ; высота трапеціи 12 футовъ. Опредѣлить основанія.

108. Сумма двухъ чиселъ равна 22, а сумма кубовъ ихъ равна 2926. Найти эти числа.

108. Разность двухъ чиселъ равна 3, а разность кубовъ ихъ равна 657. Найти эти числа.

109. Найти такую дробь, чтобы сумма квадратовъ ея членовъ равнялась 25, а сумма этой дроби съ обратной дробью равнялась бы $\frac{25}{12}$.

109. Найти такую дробь, чтобы сумма квадратовъ ея членовъ равнялась 13, а сама дробь была бы больше своей обратной на $\frac{5}{6}$.

110. Сумма квадратовъ цифръ двузначнаго числа равна 34; произведеніе искомаго числа на обращенное равно 1855. Найти число

110. Произведеніе цифръ двузначнаго числа равно 18; произведеніе искомаго числа на обращенное равно 2268. Найти число.

111. Изъ двухъ городовъ выѣзжаютъ навстрѣчу одинъ другому два путешественника. Проѣхавъ число дней, равное разности между числами верстъ, проѣзжаемыхъ ими въ день, они встрѣчаются и узнаютъ, что первый проѣхалъ 216 верстъ. Разстояніе между городами 396 верстъ. Сколько верстъ проѣзжаетъ въ день каждый?

111. Изъ двухъ городовъ выѣзжаютъ по одному направленію два путешественника, первый позади второго. Проѣхавъ число дней, равное суммѣ чиселъ верстъ, проѣзжаемыхъ ими въ день, они съѣзжаются и узнаютъ, что второй проѣхалъ 525 верстъ. Разстояніе между городами 175 верстъ. Сколько верстъ проѣзжаетъ въ день каждый?

112. Одна изъ сторонъ треугольника 39 футовъ, сумма двухъ другихъ сторонъ 66 футовъ, а уголъ, составленный послѣдними, 60°. Найти стороны треугольника.

112. Одна изъ сторонъ треугольника 43 фута, разность двухъ другихъ сторонъ 22 фута, а уголъ, составленный послѣдними, 120°. Найти стороны треугольника.

113. Для перетаскиванія товара съ одного мѣста на другое нанято нѣкоторое число рабочихъ, которые переносятъ весь товаръ въ 10 часовъ. Если бы рабочихъ было 10-ю больше и каждый переносилъ бы въ часъ на 5 пудовъ больше, то работа была бы кончена въ 8 часовъ; а если бы рабочихъ было 20-ю меньше и каждый переносилъ бы въ часъ 5-ю пудами меньше, то на работу ушло бы 15 часовъ. Сколько нанято рабочихъ и сколько пудовъ каждый изъ нихъ переноситъ въ часъ?

113. Для перетаскиванія товара съ одного мѣста на другое нанято нѣкоторое число рабочихъ, которые переносятъ весь товаръ въ 8 часовъ. Если бы рабочихъ было 8-ю больше, но каждый переносилъ бы въ часъ 5-ю пудами меньше, то работа была бы кончена въ 7 часовъ; а если бы рабочихъ было 8-ю меньше, но каждый переносилъ бы въ часъ 11-ю пудами больше, то на работу ушло бы 9 часовъ. Сколько нанято рабочихъ и сколько пудовъ каждый изъ нихъ переноситъ въ часъ?

114. Два работника кончили вмѣстѣ нѣкоторую работу въ 12 часовъ. Если бы сначала первый сдѣлалъ половину этой работы, а затѣмъ другой остальную часть, то они употребили бы вмѣстѣ 25 часовъ. Во сколько часовъ каждый отдѣльно могъ бы окончить эту работу?

114. Два работника кончили вмѣстѣ нѣкоторую работу въ 20 часовъ. Если бы сначала первый сдѣлалъ третью часть этой работы, а потомъ второй остальную часть, то они употребили бы вмѣстѣ 50 часовъ. Во сколько часовъ каждый отдѣльно могъ бы окончить эту работу?

115. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую вода вливается, черезъ вторую вытекаетъ. При совмѣстномъ дѣйствіи обѣихъ трубъ бассейнъ наполняется въ 6 часовъ. Если бы уменьшить площади поперечныхъ разрѣзовъ трубъ такъ, чтобы первая труба наполняла бассейнъ часомъ дольше, а вторая опоражнивала также

часомъ дольше, то при совмѣстномъ дѣйствіи обѣихъ трубъ бассейнъ наполнился бы въ 12 часовъ. Во сколько часовъ первая труба наполняетъ бассейнъ и во сколько часовъ вторая его выливаетъ?

115. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую вода вытекаетъ, черезъ вторую вливается. При совмѣстномъ дѣйствіи обѣихъ трубъ бассейнъ наполняется въ 24 часа. Если бы увеличить площадь поперечныхъ разрѣзовъ трубъ такъ, чтобы первая труба двумя часами скорѣе опоражнивала бассейнъ, а вторая также двумя часами скорѣе наполняла его, то при совмѣстномъ дѣйствіи обѣихъ трубъ бассейнъ наполнился бы въ 12 часовъ. Во сколько часовъ первая труба выливаетъ бассейнъ и во сколько часовъ вторая его наполняетъ?

116. На протяженіи 60 футовъ переднее колесо экипажа дѣлаетъ на 10 оборотовъ меньше задняго. Если бы окружность передняго колеса уменьшить на 2 фута, а окружность задняго увеличить на 2 фута, то на томъ же протяженіи переднее колесо сдѣлало бы на 4 оборота меньше задняго. Найти окружности обоихъ колесъ.

116. На протяженіи 90 футовъ заднее колесо экипажа дѣлаетъ на 5 оборотовъ больше передняго. Если бы окружность задняго колеса уменьшить на 1 футъ, а окружность передняго увеличить на 1 футъ. то на томъ же протяженіи заднее колесо сдѣлало бы на 9 оборотовъ больше передняго. Найти окружности обоихъ колесъ.

117. Одна часть капитала, состоящаго изъ 10000 рублей, приноситъ ежегодно 300 рублей прибыли, а другая 240 рублей прибыли. Со второй части получается однимъ процентомъ больше чѣмъ съ первой. Посколько процентовъ отдана каждая часть?

117. Одна часть капитала, состоящаго изъ 8400 рублей, приноситъ ежегодно 192 рубля прибыли, а другая 360 рублей прибыли. Съ первой части получается двумя процентами больше, чѣмъ со второй. Посколько процентовъ отдана каждая часть?

118. Помѣщикъ продалъ 10 четвертей ржи и нѣсколько четвертей овса за 79 р. 50 к., взявъ за четверть ржи на $1\frac{1}{2}$ р. меньше того, что стоили 2 четверти овса. Нѣсколько времени спустя, онъ продалъ ржи 15 четвертей, а овса на 4 четверти больше, чѣмъ прежде, и при этомъ взялъ рублемъ дороже за каждую четверть ржи и овса. При второй продажѣ онъ выручилъ 147 руб.. Сколько продано овса въ первый разъ и по какой цѣнѣ?

118. Помѣщикъ продалъ нѣсколько четвертей ржи и 20 четвертей овса за 114 рублей, взявъ за четверть овса на 2 р. 40 коп меньше того, что стоила четверть ржи. Нѣсколько времени спустя онъ продалъ ржи на 3 четверти меньше, чѣмъ прежде, а овса 25 четвертей и при этомъ взялъ за каждую четверть ржи и овса на 60 коп. дороже. При второй продажѣ онъ выручилъ 132 рубля. Сколько продано ржи въ первый разъ и по какой цѣнѣ?

Въ каждой изъ нижеслѣдующихъ задачъ нужно составить болѣе двухъ уравненій съ соотвѣтствующимъ числомъ неизвѣстныхъ.

119. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ 208 футамъ; сумма катетовъ на 30 футовъ больше гипотенузы. Найти стороны треугольника.

119. Периметръ прямоугольнаго треугольника равенъ 30 футамъ; площадь его 30 квадратныхъ футовъ. Найти стороны треугольника.

120. Найти стороны прямоугольнаго треугольника, зная, что разность катетовъ равна 1 футу, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, равенъ 2,4 фута.

120. Найти стороны прямоугольнаго треугольника, зная, что периметръ его равенъ 24 футамъ, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, равенъ 4,8 фута.

121. Сумма трехъ чиселъ, составляющихъ непрерывную разностную пропорцію, равна 54, а произведеніе ихъ равно 5760. Найти эти числа.

121. Сумма трехъ чиселъ, составляющихъ непрерывную разностную пропорцію, равна 12, а сумма квадратовъ ихъ равна 66. Найти эти числа.

122. Сумма цифръ трехзначнаго числа равна 11; сумма квадратовъ тѣхъ же цифръ 45. Если отъ искомаго числа отнять 198, то получится число обращенное. Найти это число.

122. Сумма цифръ трехзначнаго числа равна 14; цифра десятковъ представляетъ среднее геометрическое между цифрами сотенъ и единицъ. Если къ искомому числу придать 594, то получится число обращенное. Найти это число.

123. Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда равна 192 кв футамъ; діагональ его равна 13 футамъ; одна изъ сторонъ основанія больше суммы двухъ другихъ измѣреній на 5 футовъ. Найти измѣренія.

123. Площадь прямоугольнаго треугольника равна 30 кв. футамъ Если бы стороны этого прямоугольника принять за измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда, то параллелепипедъ имѣлъ бы объемъ въ 780 куб. футовъ. Найти стороны.

124. Сумма трехъ чиселъ, составляющихъ непрерывную кратную пропорцію, равна 19, а сумма квадратовъ ихъ 133. Найти числа

124. Сумма трехъ чиселъ, составляющихъ непрерывную кратную пропорцію, равна 39, а произведеніе ихъ 1000. Найти числа.

125. Два разносчика имѣли вмѣстѣ 100 яблокъ и, продавъ ихъ по разной цѣнѣ, выручили поровну. Если бы первый продалъ столько, сколько второй, то онъ выручилъ бы 1 р. 80 к.; если бы второй продалъ столько, сколько первый, то онъ выручилъ бы 80 к.. Сколько было яблокъ у каждаго и почемъ они ихъ продавали?

125. Два разносчика имѣли вмѣстѣ 120 яблокъ и, продавъ ихъ по разной цѣнѣ, выручили поровну. Если бы первый продалъ столько, сколько второй, то онъ выручилъ бы 4 р. 90 к.; если бы второй продалъ столько, сколько первый, то онъ выручилъ бы 2 р. 50 к.. Сколько было яблокъ у каждаго и почемъ они ихъ продавали?

126. Найти трехзначное число по слѣдующимъ условіямъ: частное отъ дѣленія искомаго числа на сумму его цифръ равно 48; частное отъ дѣленія на ту же сумму произведенія цифръ равно $10\frac{2}{3}$; цифра десятковъ есть среднее ариѳметическое остальныхъ цифръ.

126. Найти трехзначное число по слѣдующимъ условіямъ: частное отъ дѣленія искомаго числа на обращенное равно $\frac{24}{13}$; частное отъ дѣленія произведенія цифръ на ихъ сумму равно $\frac{8}{3}$; цифра десятковъ есть среднее ариѳметическое остальныхъ цифръ.

127. Опредѣлить измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда, зная, что сумма всѣхъ измѣреній равна 17 футамъ, діагональ параллелепипеда 11 футовъ и объемъ 108 куб. футовъ.

127. Опредѣлить измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда, зная, что сумма всѣхъ измѣреній равна 13 футамъ, полная поверхность 88 футамъ и объемъ 32 куб. фута.

128. Четыре числа образуютъ разностную пропорцію; произведеніе крайнихъ членовъ ея равно 18, а произведеніе среднихъ 30; сумма же квадратовъ всѣхъ членовъ равна 146. Найти эти числа.

128. Четыре числа образуютъ разностную пропорцію; сумма квадратовъ крайнихъ членовъ ея равна 41, а сумма квадратовъ среднихъ 45; произведеніе же всѣхъ членовъ равно 360. Найти эти числа.

129. Четыре числа образуютъ кратную пропорцію; сумма крайнихъ членовъ ея равна 24, а сумма среднихъ 21; произведеніе всѣхъ членовъ равно 11664. Найти эти числа.

129. Четыре числа образуютъ кратную пропорцію; сумма крайнихъ членовъ ея равна 32, а сумма среднихъ 40; сумма квадратовъ всѣхъ членовъ равна 1700. Найти эти числа.

130. Найти четырехзначное число по слѣдующимъ условіямъ: сумма квадратовъ крайнихъ цифръ равна 13; сумма квадратовъ среднихъ равна 85; цифра тысячъ на столько больше цифръ единицъ, на сколько цифра сотенъ больше цифры десятковъ; если изъ искомаго числа вычесть 1089, то получится число обращенное.

130. Найти четырехзначное число по слѣдующимъ условіямъ: произведеніе крайнихъ цифръ равно 40; произведеніе среднихъ равно 28; цифра тысячъ на столько меньше цифры единицъ, на сколько цифра сотенъ меньше цифры десятковъ; если къ искомому числу прибавить 3267, то получимъ число обращенное.

ОТДѢЛЕНІЕ XI.

НЕОПРЕДѢЛЕННЫЙ АНАЛИЗЪ.

ИЗСЛѢДОВАНІЕ УРАВНЕНІЙ.

§ 1. Неравенства.

Къ обѣимъ частямъ неравенства можно прибавить поровну и можно изъ нихъ вычесть поровну.

Неравенства съ одинаковыми знаками можно складывать, удерживая ихъ общій знакъ.

Неравенства съ различными знаками можно вычитать, удерживая знакъ того изъ нихъ, изъ котораго вычитается другое.

Обѣ части неравенства можно умножить или раздѣлить на положительное количество; при умноженіи или дѣленіи на отрицательное количество знакъ неравенства долженъ быть измѣненъ.

При перемноженіи неравенствъ и дѣленіи ихъ нужно принимать въ расчетъ опредѣленіе неравенства и правила знаковъ. Если части двухъ данныхъ неравенствъ всѣ положительны, то правила умноженія и дѣленія сходны съ правилами сложенія и вычитанія.

При возведеніи неравенствъ въ степень и извлеченіи изъ нихъ корня нужно принимать въ расчетъ опредѣленіе неравенства и правила знаковъ.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ сложить два данныхъ неравенства:

1. $5>-3,\ 8>5$ — 1. $-8<2,\ 3<5$

2. $2<5,\ -7<-3$ — 2. $7>3,\ -4>-9$

3. $x^2>a+1,\ 2x>a-5$ — 3. $3a^2<x+1,\ 2a-a^2<x^2-1$

4. $3x+y<2a+1,\ 3y-2x<14-2a$

4. $3x^2+2y>4a-2,\ 5y-2x^2>8+3a.$

Въ слѣдующихъ примѣрахъ вычесть второе неравенство изъ перваго:

5. $16>13,\ 2<5$ — 5. $6<10,\ 4>2$

6. $8<-5,\ -2>-7$ — 6. $-3>-7,\ -9<\ 5.$

7. $2x > b^2$, $a^3 < 9 - x$

8. $(a-b)^2 < 2$, $(a+b)^2 > 8$

7. $x^2 - 4 < 2$, $a - x^2 > 3x$

8. $a^3 - b^3 > 3$, $a^3 + b^3 < 13$

Умножить части неравенствъ на показанныхъ множителей:

9. $5 > -2$ на 5

10. $-7 < -5$ на -2

11. $a^2 > b$ на $-b$

12. $a - 1 < b$ на $-m$

9. $-8 < 2$ на 3

10. $-2 > -13$ на -5

11. $3a < b$ на $-a$

12. $1 - m > a$ на $-b$

Раздѣлить части неравенствъ на показанныхъ дѣлителей:

13. $-6 < 9$ на 3

14. $-15 > -35$ на -5

15. $a^3 < a^2$ на $-a$

16. $(a-b)^3 > (a-b)^2$ на $a - b$

13. $4 > -10$ на 2

14. $-45 < -12$ на -3

15. $a^3 > a^4$ на $-a$

16. $(a+b)^2 < (a+b)^3$ на $a + b$

Перемножить неравенства:

17. $5 > 3$, $7 > 2$

18. $2 > -5$, $-3 > -7$

19. $-3 < 5$, $-5 < 2$

20. $-13 < -7$, $-9 < -15$

17. $4 < 7$, $2 < 5$

18. $-3 < 2$, $-7 < -3$

19. $2 > -5$, $5 > -4$

20. $-7 > -10$, $-3 > -8$

Раздѣлить неравенства:

21. $35 < 40$, $7 > 5$

22. $-6 < 4$, $3 > 2$

23. $-\frac{3}{4} > -\frac{14}{9}$, $\frac{3}{2} < \frac{8}{3}$

24. $\frac{8}{5} > \frac{2}{3}$, $-\frac{7}{15} < -\frac{2}{9}$

21. $72 > 21$, $6 < 7$

22. $15 > -8$, $3 < 4$

23. $-\frac{7}{6} < -\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8} > \frac{4}{15}$

24. $\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$, $-\frac{4}{15} > -\frac{6}{7}$

Неравенства, содержащія неизвѣстную букву, можно рѣшат какъ уравненія и такими же пріемами. Рѣшеніе неравенства выра жается также неравенствомъ и потому каждому неравенству удовле творяютъ безчисленныя значенія неизвѣстной буквы.

Рѣшить неравенства:

25 $x + 4 > 2 - 3x$

26. $4(x-1) > 2 + 7x$

27. $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$

28 $\frac{37-2x}{3} + 9 < \frac{3x-8}{4} \quad x$

29. $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$

30. $\frac{7-6x}{2} + 12 < \frac{8x+1}{3} - 10x$

25. $3 + 5x < 7x + 4$

26. $3(x-2) < 4x - 9$

27. $\frac{x}{5} - 3\frac{1}{3} > 1\frac{3}{4} - \frac{5}{2}x$

28. $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$

29. $(1+x)^2 + 3x^2 < (2x-1)^2 + 7$

30. $8 + \frac{3x-4}{5} > \frac{x-1}{6} - \frac{5x-3}{8}$

Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ x нижеписанныя выраженія положительны?

31. $2x-16$ — 31. $18\ 3x$

32 $5-3x$ — 32. $3x-7$

33. $\frac{3}{8}x-4$ — 33. $\frac{5}{2}-4x$

34. $\frac{x+1}{2}-2x+2\frac{1}{2}$ — 34. $\frac{3x+1}{2}+\frac{21-2x}{3}$

35. $\frac{5-x}{8}+\frac{3+2x}{4}$ — 35. $\frac{12+x}{4}-\frac{x}{3}-1$

Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ x нижеписанныя выраженія отрицательны?

36. $3x+15$ — 36. $25-5x$

37. $7-14x$ — 37. $12x+3$

38. $5-\frac{2}{3}x$ — 38. $\frac{3}{4}-2x$

39. $\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}$ — 39. $\frac{8x-3}{5}-\frac{2x}{3}$

40. $\frac{3x-5}{2}-\frac{2x-1}{3}+2$ — 40. $\frac{4-5x}{6}+\frac{3-4x}{3}-5$

Иногда одно и то же неизвѣстное должно удовлетворять двумъ или нѣсколькимъ неравенствамъ, которыя въ такомъ случаѣ называются совокупными. Каждое изъ данныхъ неравенствъ разрѣшается отдѣльно и даетъ особый предѣлъ для неизвѣстнаго. При сопоставленіи найденныхъ предѣловъ они могутъ оказаться или такъ называемыми совпадающими, какъ, напр., $x>a$ и $x>b$, въ каковомъ случаѣ они приводятся къ одному, или ограничивающими, какъ, напр., $x>a$ и $x<b$, при чемъ a есть меньшее количество, или наконецъ противорѣчащими, когда x оказывается бóльшимъ бóльшаго изъ предѣловъ и меньшимъ меньшаго.

Въ послѣднемъ случаѣ неравенства должны считаться несовмѣстными.

Рѣшить совокупныя неравенства:

41. $2x>4x+6$ и $4x+3<2x+1$

41. $8x>5x-9$ и $4x-5<6x+5$

42. $3x+7>7x-9$ и $x-3>-3x+1$

42. $5x-11<3x+9$ и $14-2x<5x-7$

43. $5x-3>1+x$ и $\frac{1}{2}-3x<\frac{2}{3}x-5$

43 $7x-1\frac{1}{2}>2+5x$ и $1-2x<3x-1$

44. $4x+7>2x+13$ и $3x-18<2x+1$

44. $15+8x>11x\ \ 18$ и $5x+3<7x+9$

45. $6x-7>5x-1$ и $3x+6>8x-4$

45. $5x-2<1+2x$ и $6x-3>3+4x$

46. $2(x-3)-1<5$ и $\frac{3x}{8}-7>\frac{x}{12}$

46. $\frac{5}{9}x+\frac{2}{3}>6\frac{2}{9}$ и $3(x-2)+2<5$

47. $3x+2>x-2$, $x+15>6-2x$ и $x-14<5x+14$

47. $5x+3<3x-7$, $2+7x<3x-10$ и $3x-8>8x+2$

48. $3x-4<8x+6$, $15x+9<11x+50$ и $2x-1>5x-4$

48. $2x+7>4-x$, $3x+5>x-5$ и $3x-10<5-2x$

Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a нижеписанныя дроби положительны?

49. $\frac{2a-3}{3a-2}$ 49. $\frac{3a-5}{2a-7}$ **50.** $\frac{3a-8}{5-a}$ 50. $\frac{4-a}{2a-5}$

51. $\frac{2-3a}{2a+7}$ 51. $\frac{3a+8}{3-5a}$ **52.** $\frac{3a-7}{2-5a}$ 52. $\frac{3-8a}{3a-5}$

Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a нижеписанныя дроби отрицательны?

53. $\frac{8-3a}{7a-2}$ 53. $\frac{3-5a}{2a-3}$

54. $\frac{5a+8}{3a-7}$ 54. $\frac{5a-11}{2a+3}$

55. На основаніи неравенства $(a-b)^2>0$ доказать, что сумма квадратовъ двухъ чиселъ всегда больше удвоеннаго произведенія тѣхъ же чиселъ.

55. На основаніи того же неравенства доказать, что квадратъ одного числа всегда больше разности между удвоеннымъ произведеніемъ обоихъ чиселъ и квадратомъ другого числа.

56. На основаніи неравенства $(a-b)^2>0$ доказать, что сумма двухъ кратныхъ взаимно обратныхъ отношеній двухъ чиселъ всегда больше числа 2.

56. На основаніи того же неравенства доказать, что разность между квадратомъ отношенія двухъ чиселъ и удвоеннымъ отношеніемъ всегда больше отрицательной единицы.

57. Доказать, что правильная дробь увеличивается отъ прибавленія къ членамъ ея одного и того же положительнаго числа.

57. Доказать, что неправильная дробь уменьшается отъ прибавленія къ членамъ ея одного и того же положительнаго числа.

58. Доказать, что среднее ариѳметическое двухъ чиселъ больше средняго геометрическаго между ними.

58. Доказать, что произведеніе разности квадратныхъ корней изъ двухъ чиселъ на корень уменьшаемый больше произведенія той же разности на корень вычитаемый.

59. Доказать, что во всякомъ треугольникѣ полупериметръ больше каждой изъ сторонъ.

59. Доказать, что во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ высота, опущенная на гипотенузу. меньше половины гипотенузы.

60. Доказать, что во всякомъ треугольникѣ удвоенная сумма произведеній сторонъ попарно больше суммы квадратовъ сторонъ.

60. Доказать, что во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ удвоенной высоты, опущенной на гипотенузу. меньше суммы квадрата гипотенузы съ удвоеннымъ произведеніемъ катетовъ.

Рѣшеніе неравенствъ второй степени основано на свойствахъ трехчлена ax^2+bx+c, а именно замѣтимъ слѣдующее:

Если корни трехчлена дѣйствительны и различны, то, обозначивъ эти корни черезъ α и β, имѣемъ формулу

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

откуда видно, что при значеніяхъ x-са бо́льшихъ большаго изъ корней или меньшихъ меньшаго изъ корней, т.-е. при значеніяхъ, которыя обращаютъ множителей $x-\alpha$ и $x-\beta$ въ количества съ одинаковыми знаками, знакъ трехчлена одинаковъ со знакомъ коэффиціента a, а при значеніяхъ x-са, заключающихся между α и β, т.-е. при значеніяхъ, обращающихъ множителей $x-\alpha$ и $x-\beta$ въ количества съ разными знаками, знакъ трехчлена противоположенъ знаку a. Поэтому. если дано неравенство $ax^2+bx+c>0$ съ дѣйствительными корнями трехчлена, то при $a>0$ значеніе x состоитъ внѣ корней, а при $a<0$ заключается между ними.

Если корни трехчлена мнимы, то, положивъ $\alpha=\lambda+\mu i$, и $\beta=\lambda-\mu i$, находимъ вмѣсто вышеуказанной такую формулу

$$ax^2+bx+c=a[(x-\lambda)^2+\mu^2],$$

откуда видно, что выраженіе въ скобкахъ положительно при всякихъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x, а слѣдовательно трехчленъ всегда имѣетъ знакъ одинаковый съ коэффиціентомъ a. Поэтому если дано неравенство $ax^2+bx+c>0$ съ мнимыми корнями трехчлена, то при $a>0$ значеніе x произвольно, а при $a<0$ неравенство невозможно

61. $x^2+4x+4>0$

62. $x^2+x-6>0$

63. $x^2-3x-10<0$

64. $x^2-6x+10>0$

65. $6-5x-6x^2<0$

66. $6x-5-5x^2>0$

67. $\frac{x-5}{x+3}>0$

68. $\frac{2x+5}{3-5x}>0$

69. $x^4-13x^2+36>0$

70. $20-25x^4-121x^2<0$

61. $x^2-6x+9>0$

62. $x^2-2x-15>0$

63. $x^2+x-12<0$

64. $x^2+8x+25>0$

65. $15-8x^2-12x<0$

66. $10x-13x^2-13>0$

67. $\frac{x+2}{x-7}>0$

68. $\frac{3x-2}{5-2x}>0$

69. $x^4-29x^2+100>0$

70. $27-37x^2-16x^4<0$

§ 2. Изслѣдованіе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Уравненіе первой степени съ соизмѣримыми коэффиціентами имѣетъ одинъ корень, выражаемый соизмѣримымъ и въ общемъ случаѣ дробнымъ числомъ.

Корень можетъ быть положительнымъ, отрицательнымъ, нулевымъ, безконечнымъ, или неопредѣленнымъ. Каждое значеніе корня вполнѣ удовлетворяетъ соотвѣтствующему уравненію и соотвѣтствуетъ особенностямъ формы послѣдняго.

Положительный корень обыкновенно даетъ вполнѣ удовлетворительный отвѣтъ на вопросъ задачи, но въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ можетъ оказываться несообразнымъ.

Если корень уравненія отрицательный, то, перемѣнивъ въ уравненіи знакъ у x, получаемъ новое уравненіе, котораго корень имѣетъ ту же абсолютную величину, но оказывается положительнымъ. Отрицательный корень не удовлетворяетъ вопросу тогда когда неизвѣстное вопроса есть абсолютная величина; въ такомъ случаѣ перемѣна знака x въ уравненіи позволяетъ исправить задачу, измѣняя въ ней нѣкоторыя условія въ смыслѣ перемѣны направленія указанныхъ въ условіяхъ количествъ.

Нулевой корень не удовлетворяетъ вопросу тогда, когда по роли неизвѣстнаго оно должно быть отлично отъ нуля.

Безконечный корень вообще указываетъ несообразность вопроса; только въ исключительныхъ случаяхъ онъ можетъ считаться косвеннымъ отвѣтомъ на данный вопросъ.

Неопредѣленный корень, представляющій произвольное количество, получается тогда, когда уравненіе обращается въ тождество, т.-е. когда условія вопроса суть только кажущіяся, а на самомъ дѣлѣ никакихъ условій нѣтъ.

Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a нижеслѣдующія уравненія имѣютъ положительныя рѣшенія?

71. $5(x-3)=3(3x-2a)$

71. $3(4x-a)=4(x-2)$

72. $3(x+1)-4+ax$

72. $4(x-2)=3ax-2$

73. $\frac{5}{3+x}=\frac{a}{x}$

73. $\frac{x-2}{x}=\frac{3}{a}$

74. $\frac{3}{x+1} \quad 8-a$

74. $a+3=\frac{4x-1}{x-1}$

Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a нижеслѣдующія уравненія имѣютъ отрицательныя рѣшенія?

75. $7-a \quad \frac{2}{x \quad 1}$

75. $\frac{3x+1}{x+1}=a-2$

76. $\frac{3}{4x-a}=\frac{2}{ax-5}$

76. $\frac{a}{4+5x}=\frac{4}{3x \quad 5}$

Нижеслѣдующія уравненія, имѣющія отрицательныя рѣшенія, измѣнить, такъ, чтобы рѣшенія ихъ сдѣлались положительными.

77. $4x-75=6(x-10)+85$

77. $13x-22-17(x-2)+28$

78. $5(3-7x)+4(3x-7)=35+x$

78. $6(x-1)-12x \quad 12(x+3)-2(x+5)$

Изслѣдовать, при какихъ значеніяхъ буквенныхъ количествъ, входящихъ въ нижеслѣдующія уравненія, эти уравненія имѣютъ положительныя, отрицательныя, нулевыя, безконечныя и неопредѣленныя рѣшенія?

79. $\frac{a}{a-x}=\frac{m}{n}$

79. $\frac{a+x}{x}=\frac{m}{n}$

80. $3ax+b-b(a+x)$

80. $2(3a+x)=a(b+x)$

81. $ax+m \quad b(x+n)$

81. $nx+m(a-x) \quad bmn$

82. $\frac{px+m}{x+m}=\frac{a}{b}$

82. $\frac{x-m}{px-m}=\frac{a}{b}$

83. Двѣ партіи рабочихъ получили вмѣстѣ 120 рублей; каждый рабочій первой партіи получилъ 7 р., а каждый рабочій второй 5 р.; во второй партіи было 3-мя рабочими больше, чѣмъ въ первой. Сколько было рабочихъ въ каждой партіи?

83. Въ обществѣ, состоящемъ изъ 12 лицъ, сдѣланъ былъ сборъ въ пользу бѣдныхъ; каждый мужчина внесъ по 6 р., а каждая женщина по 2 руб.; всего собрали 54 руб.. Сколько было мужчинъ и женщинъ?

84. Опредѣлить двузначное число, въ которомъ число десятковъ вдвое меньше числа простыхъ единицъ, а разность между числами единицъ и десятковъ составляетъ 6.

84. Опредѣлить двузначное число, въ которомъ сумма цифръ рав на 14 и которое отъ прибавленія 72 обращается въ число съ обратнымъ порядкомъ прежнихъ цифръ.

85. Изъ двухъ игроковъ первый имѣлъ 250 р., а второй 100 р.; послѣ нѣсколькихъ игръ у перваго оказалось денегъ въ 6 разъ больше, чѣмъ у второго. Сколько проигралъ первый второму?

85. Изъ двухъ игроковъ первый имѣлъ 270 р., а второй 50 р.; послѣ нѣсколькихъ игръ у перваго оказалось денегъ втрое больше. чѣмъ у второго. Сколько выигралъ первый у второго?

86. Куплено нѣсколько фунтовъ муки; если бы за каждый фунтъ заплатили 8 к., то у покупщика осталось бы 12 к., а если бы фунтъ стоилъ 6 к., то у покупщика не хватило бы 4 к.. Сколько муки куплено?

86. Куплено нѣсколько фунтовъ муки; если бы за каждый фунтъ заплатили по 9 к., то у покупщика не хватило бы 14 к., а если бы фунтъ стоилъ 12 к., то у покупщика осталось бы 7 к.. Сколько муки куплено?

87. Изъ двухъ сортовъ чаю цѣною въ 3 р. и 5 р. за фунтъ требуется составить 12 фунтовъ смѣси цѣной по 2 р. 50 к. за фунтъ. Поскольку нужно взять отъ каждаго сорта?

87. Изъ двухъ сортовъ чаю цѣною въ 3 р. и 3 р. 50 к. за фунтъ требуется составить 8 фунтовъ смѣси цѣною въ 4 р. за фунтъ. Поскольку нужно взять отъ каждаго сорта?

88. Въ бассейнъ проведены три трубы; первая можетъ наполнить бассейнъ въ 6 часовъ, вторая въ 8 часовъ; черезъ третью трубу вода выливается и можетъ вытечь вся въ 3 часа. Во сколько времени наполнится бассейнъ при одновременномъ дѣйствіи всѣхъ трубъ?

88. Въ бассейнъ, наполненный водой, проведены три трубы; черезъ первую трубу вся вода можетъ вытечь въ 6 часовъ, черезъ вторую въ 9 часовъ; третья труба можетъ снова наполнить бассейнъ въ 3 часа. Послѣ часового дѣйствія первыхъ двухъ трубъ открыли третью. Черезъ сколько времени послѣ этого можетъ вытечь изъ бассейна вся вода?

89. За провозъ нѣкотораго товара платятъ возчикамъ по копѣйкѣ съ пуда и версты; упаковка товара обходится въ 3 коп. съ пуда. На какое разстояніе можно перевезть 3000 пудовъ товара за 60 рублей?

89. За провозъ нѣкотораго товара желѣзная дорога беретъ по 0,1 копѣйки съ пуда и версты; кромѣ того за нагрузку взимается 1 р. 50 к. съ 1000 пудовъ. На какое разстояніе можно перевезти 50000 пудовъ за 70 рублей?

90. Два курьера отправляются одновременно изъ мѣста A и B и ѣдутъ по одному направленію черезъ мѣсто C, расположенное за мѣстомъ B. Разстояніе AC равно 50 верстамъ, разстояніе AC=40 верстамъ. Первый курьеръ проѣзжаетъ въ часъ 10 верстъ, второй 6 верстъ. На какомъ разстояніи, за мѣстомъ C, первый догонитъ второго?

90. Два курьера выѣзжаютъ одновременно изъ мѣстъ A и B и ѣдутъ по одному направленію къ мѣсту C, расположенному за мѣстомъ B. Разстояніе AC равно 90 верстамъ, разстояніе BC=54 верстамъ. Первый курьеръ проѣзжаетъ въ часъ 11 верстъ, второй 8 верстъ. На какомъ разстояніи, не доѣзжая до C, первый курьеръ догонитъ второго?

91. Возрастъ отца 50 лѣтъ 8 мѣсяцевъ, а возрастъ сына 12 лѣтъ 8 мѣсяцевъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вчетверо старше сына?

91. Возрастъ сына 15 лѣтъ 5 мѣсяцевъ, а возрастъ отца 46 лѣтъ 3 мѣсяца. Сколько лѣтъ тому назадъ отецъ былъ втрое старше сына?

92. Числитель нѣкоторой дроби составляетъ $\frac{5}{6}$ знаменателя; если прибавить къ числителю 6 и къ знаменателю 9, то дробь обратится въ $\frac{2}{3}$. Найти эту дробь.

92. Знаменатель нѣкоторой дроби составляетъ $\frac{3}{4}$ ея числителя; если же отъ обоихъ членовъ дроби отнять по 10, то дробь обратится въ 1. Найти эту дробь.

93. Какое число нужно прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{5}{6}$, чтобы дробь обратилась въ единицу?

93. Какое число нужно вычесть изъ числителя и знаменателя дроби $\frac{9}{7}$, чтобы дробь обратилась въ единицу?

94. Въ бассейнъ проведены три трубы; первая наполняетъ его въ 8 часовъ, вторая въ 4 часа; черезъ третью трубу вода вытекаетъ

и можетъ вытечь вся въ 2 ч. 40 м.. Во сколько часовъ наполнится бассейнъ при одновременномъ дѣйствіи всѣхъ трубъ?

94. Въ бассейнъ проведены три трубы; первая можетъ наполнить его въ 2 ч. 24 м.; черезъ вторую вся вода можетъ вытечь въ 4 часа а черезъ третью въ 6 часовъ. Во сколько времени полный бассейнъ можетъ вытечь при одновременномъ дѣйствіи всѣхъ трубъ?

95. Изъ мѣстъ A и B выходятъ одновременно два пѣшехода и идутъ по одному направленію. Первый пѣшеходъ идетъ по 8 часовъ въ день и въ каждый часъ проходитъ по 5 верстъ, второй идетъ по 10 часовъ въ день и въ каждый часъ проходитъ по 4 версты. Черезъ сколько дней первый догонитъ второго, если извѣстно, что разстояніе AB равно 75 верстамъ?

95. Изъ мѣстъ A и B выходятъ одновременно два пѣшехода и идутъ по одному направленію. Считая всѣ остановки, первый пѣшеходъ проходитъ среднимъ числомъ по $16\frac{1}{2}$ верстъ въ каждые $5\frac{1}{2}$ часовъ, а второй по 14 верстъ въ каждые $4\frac{2}{3}$ часа. На какомъ разстояніи отъ A первый догонитъ второго, если извѣстно, что разстояніе AB равно 60 верстамъ?

96. Въ одномъ закромѣ имѣется 120 четвертей овса, а въ другомъ 180. Сколько разъ въ первый закромъ нужно всыпать по 4 четверти, а во второй по 2 четверти, чтобы въ первомъ оказалось вдвое больше овса, чѣмъ въ другомъ?

96. Въ одномъ амбарѣ 2000 четвертей овса, а въ другомъ 3000. Сколько разъ слѣдуетъ взять изъ перваго по 2 четверти, а изъ второго по 6 четвертей, чтобы въ первомъ оказалось втрое меньше овса, чѣмъ во второмъ?

97. Нѣкоторое двузначное число, въ которомъ число десятковъ двумя больше числа простыхъ единицъ, имѣетъ такое свойство, что если въ немъ переставить цифры, то получается число меньшее прежняго на 18. Найти это число.

97. Нѣкоторое двузначное число, въ которомъ число десятковъ тремя меньше числа простыхъ единицъ, имѣетъ такое свойство, что если въ немъ переставить цифры, то получается число большее прежняго на 27. Найти это число.

98. Имѣется четыре куска сукна; во второмъ больше 3-мя аршинами, въ третьемъ 5-ю и въ четвертомъ 8-ю, чѣмъ въ первомъ;

вмѣстѣ же въ первомъ и четвертомъ столько, сколько во второмъ и въ третьемъ. Сколько аршинъ въ каждомъ кускѣ?

98. Имѣются четыре куска сукна; число аршинъ второго на 3 меньше удвоеннаго числа аршинъ перваго, число аршинъ третьяго на 2 больше учетвереннаго числа аршинъ перваго, число аршинъ четвертаго 5-ю больше утроеннаго числа аршинъ перваго; вмѣстѣ же въ первомъ и третьемъ столько, сколько во второмъ и четвертомъ. Сколько аршинъ въ каждомъ кускѣ?

99. Найти число по слѣдующимъ условіямъ; если сложить $\frac{3}{4}$ отъ суммы этого числа и числа 20 съ $\frac{1}{12}$ суммы того же числа и 300, то получится $\frac{5}{6}$ суммы того же числа съ 48-ю.

99. Найти число, зная, что если сложить его съ 6-ю и сумму раздѣлить на 3, то частное будетъ на столько больше неизвѣстнаго числа, на сколько 2 больше $\frac{2}{3}$ неизвѣстнаго числа.

100. Разносчикъ купилъ 55 лимоновъ; отобравъ 25 лимоновъ худшаго достоинства, онъ разсчиталъ, что если продать каждый изъ нихъ 2-мя копѣйками дешевле того, что онъ самъ платилъ за каждый лимонъ, и надбавить на каждый изъ остальныхъ лимоновъ по 3 коп., то выручится всего 40 коп. прибыли. Почемъ платилъ онъ самъ за лимонъ?

100. Разносчикъ купилъ 75 лимоновъ, изъ которыхъ 45 оказались попорченными; разсчитывая продать каждый изъ плохихъ лимоновъ съ убыткомъ по 3 к. и взять на каждомъ изъ остальныхъ по 4 к. прибыли, онъ нашелъ, что все-таки весь товаръ принесетъ ему 15 к. убытку. Что стоилъ ему самому каждый лимонъ?

Опредѣлить истинное значеніе слѣдующихъ дробей при указанныхъ частныхъ предположеніяхъ:

101. $\frac{a^2-9}{a-3}$ при $a=3$ 101. $\frac{a^2-4}{a-2}$ при $a=2$

102. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ при $x=2$ 102. $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ при $x=3$

103. $\frac{3a^2-3b^2}{5a+5b}$ при $a=-b$ 103. $\frac{5a^2-5b^2}{2a+2b}$ при $a=-b$

104. $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ при $x=a$ 104. $\frac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$ при $x=a$

105. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$ при $x=1$

105. $\frac{x^2+4x-5}{x^2-5x+4}$ при $x=1$

106. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2+x-6}$ при $x=-3$

106. $\frac{2x^2+7x-4}{x^2+x-12}$ при $x=-4$

107. $\frac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-ab-2b^2}$ при $a=2b$

107. $\frac{a^2-6ab+9b^2}{2a^2-ab-15b^2}$ при $a=3b$

108. $\frac{3a^2-10ab+3b^2}{9a^2-6ab+b^2}$ при $b=3a$

108. $\frac{10a^2-29ab+10b^2}{4a^2-20ab+25b^2}$ при $2a=5b$

109. $\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$ при $x=1$

109. $\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}$ при $x=-2$

110. $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x+2}$ при $x=-2$

110. $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-5x+6}$ при $x=3$.

Рѣшить и изслѣдовать слѣдующія общія задачи, приводящія къ буквеннымъ уравненіямъ:

111. Одинъ работникъ дѣлаетъ въ день a аршинъ сукна, другой b аршинъ. Первый сработалъ уже m аршинъ, второй n аршинъ. Черезъ сколько дней послѣ этого количества аршинъ, сработанныхъ тѣмъ и другимъ рабочими, сравняются?

111. Въ одномъ резервуарѣ налито a ведеръ, въ другомъ b ведеръ воды. Каждый часъ прибавляется въ первый по m ведеръ, а во второй по n ведеръ. Черезъ сколько часовъ количества ведеръ въ обоихъ резервуарахъ сравняются?

112. Отцу a лѣтъ, сыну b лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ k разъ старше сына?

112. Какое число нужно вычесть изъ числа a и b для того, чтобы отношеніе разностей оказалось равнымъ k?

113. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; первая наполняетъ весь бассейнъ въ a часовъ, вторая выливаетъ изъ него всю воду въ b часовъ. Во сколько времени наполнится бассейнъ при одновременномъ дѣйствіи обѣихъ трубъ?

113. Переднее колесо повозки имѣетъ въ окружности a футовъ, заднее b футовъ. Какъ великъ путь, на которомъ переднее колесо сдѣлаетъ однимъ оборотомъ больше задняго?

114. Какое число нужно приложить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, чтобы она обратилась въ дробь $\frac{m}{n}$?

114. Какъ увеличить числа a и b на одно и то же число съ тѣмъ, чтобы получить предыдущіе члены пропорціи, которой послѣдующіе члены суть m и n?

115. Въ a ведрахъ воды растворено b фунтовъ соли; сколько нужно прибавить воды, чтобы на каждое ведро приходилось m фунтовъ соли?

115. Имѣется m фунтовъ морской воды, въ которыхъ содержится p фунтовъ соли; сколько фунтовъ чистой воды нужно прибавить, чтобы m фунтовъ смѣси содержали только q фунтовъ соли?

116. Въ двухъ точкахъ A и B прямой MN возставлены перпендикуляры къ ней. Прямая PQ отсѣкаетъ на этихъ перпендикулярахъ длины $AC=a$ и $BD=b$. Разстояніе $AB=d$. Опредѣлить разстояніе точки пересѣченія прямыхъ MN и PQ отъ точки A.

116. Къ двумъ кругамъ, которыхъ радіусы суть $AB=R$ и $CD=r$, проведена общая касательная BD. Разстояніе центровъ $AC=d$. Опредѣлить положенія точки пересѣченія касательной съ линіей, соединяющей центры.

117. Разложить число a на двѣ части такъ, чтобы сумма произведеній первой части на m и второй на n была равна суммѣ произведеній первой части на p и второй на q.

117. Разложить число a на двѣ части такъ, чтобы разность произведеній первой части на m и второй на n была равна разности произведеній первой части на p и второй на q.

118. Въ треугольникѣ ABC даны стороны $AB=c$, $AC=b$ и $BC=a$. Проведя равнодѣлящую внѣшняго угла при вершинѣ C, отмѣчаемъ точку D пересѣченія этой равнодѣлящей съ продолженіемъ стороны AB. Опредѣлить разстояніе AD.

118. Въ трапеціи $ABCD$ даны параллельныя стороны $BC=a$ и $AD=b$ и одна изъ непараллельныхъ $AB=c$. Продолживъ непараллельныя стороны, отмѣчаемъ точку E ихъ пересѣченія. Опредѣлить разстояніе AE.

119. Два курьера, двигаясь равномѣрно по одному направленію отъ M къ N, проѣзжаютъ одновременно—первый черезъ мѣсто A, второй черезъ мѣсто B. Узнать, въ какомъ разстояніи отъ A оба курьера встрѣчаются, если извѣстно, что первый проѣзжаетъ въ часъ a верстъ, второй b верстъ и что разстояніе отъ A до B равно d верстъ.

119. Два курьера, двигаясь равномѣрно по одному направленію отъ M къ N, проѣзжаютъ одновременно—первый черезъ мѣсто A, второй черезъ мѣсто B. Опредѣлить, когда оба курьера встрѣ-

чаются, если извѣстно, что первый проѣзжаетъ въ часъ a верстъ второй b верстъ и что разстояніе отъ A до B равно d верстъ.

120. Два курьера ѣдутъ по направленію MN, проѣзжая въ часъ первый a верстъ, второй b верстъ. Первый въ нѣкоторый моментъ проѣхалъ черезъ мѣсто A, второй m часовъ позднѣе проѣхалъ черезъ мѣсто B. Разстояніе $AB—d$ верстъ. Узнать, черезъ сколько часовъ послѣ проѣзда перваго черезъ A они встрѣтятся?

120. Два курьера ѣдутъ по направленію MN, проѣзжая въ часъ первый a верстъ, второй b верстъ. Первый въ нѣкоторый моментъ проѣхалъ черезъ мѣсто A, второй m часовъ позднѣе проѣхалъ черезъ мѣсто B. Разстояніе $AB=d$ верстъ. Опредѣлить разстояніе отъ B до мѣста встрѣчи.

§ 3. Изслѣдованіе системы уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Система двухъ уравненій имѣетъ одинъ корень по x и одинъ по y. Эти корни выражаются соизмѣримыми числами и въ общемъ случаѣ дробными съ одинаковымъ знаменателемъ. Значенія корней вполнѣ соотвѣтствуютъ данной формѣ уравненій.

При рѣшеніи двухъ уравненій существенно различать два случая—когда общій знаменатель корней отличенъ отъ нуля и когда онъ равенъ нулю.

Общій знаменатель обоихъ корней системы уравненій

$$ax+by=c$$
$$a_1x+b_1y=c_1$$

составляется, перемножая коэффиціенты неизвѣстныхъ накрестъ и вычитая, именно онъ имѣетъ видъ

$$ab_1 \quad a_1b.$$

Числители получаются изъ знаменателя посредствомъ замѣны коэффиціентовъ опредѣляемаго неизвѣстнаго соотвѣтствующими извѣстными членами, такъ что рѣшенія имѣютъ видъ $x=\frac{cb_1 \quad c_1b}{ab_1 \quad a_1b}$ и $y=\frac{ac_1 \quad a_1c}{ab_1 \quad a_1b}$.

Если знаменатель корней не равенъ нулю, то корни могутъ быть оба положительны, оба отрицательны, или одинъ положителенъ, а другой отрицателенъ, и въ частности могутъ получиться нулевыя рѣшенія. Уравненія при этомъ не представляютъ никакихъ важныхъ особенностей.

Въ случаѣ, когда знаменатель корней равенъ нулю, соблюдается то свойство, что числители могутъ обратиться въ нуль не иначе, какъ оба вмѣстѣ.

Если при нулевомъ знаменателѣ числители отличны отъ нуля, то

корни безконечны. Данныя уравненія тогда несовмѣстны, т.-е противорѣчатъ одно другому. Признакомъ этого случая служитъ пропорція $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$ между коэффиціентами неизвѣстныхъ, если при этомъ извѣстные члены не пропорціональны этимъ коэффиціентамъ

Если при нулевомъ знаменателѣ числители также нули, то корни неопредѣленны, т.-е. выражаются произвольными количествами Данныя уравненія тогда тождественны, т.-е. сводятся къ одному уравненію, которое одно только и ограничиваетъ произволъ неизвѣстныхъ. Признакомъ этого случая служитъ пропорція $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$ между всѣми коэффиціентами уравненій.

121. Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a система уравненій $x+y\ \ a$ и $3x-2y=10$ даетъ положительныя рѣшенія?

121. Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a система уравненій $4x+5y=15$ и $3x+2y=a$ даетъ отрицательныя рѣшенія?

122. Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a система уравненій $4x-3y=6$ и $-5x+ay=8$ даетъ отрицательныя рѣшенія?

122. Опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a система уравненій $7x-ay-1$ и $5x-9y-9$ дастъ положительныя рѣшенія?

123. Опредѣлить значеніе a, при которомъ система уравненій $3x-7y=15$ и $6x+ay=60$ не имѣетъ рѣшеній?

123. Опредѣлить значеніе a, при которомъ система уравненій $2x+5y-7$ и $7x-ay=9$ не имѣетъ рѣшеній?

124. Опредѣлить значенія a и b, при которыхъ система ур-ій $ax-6y=15$ и $4x+by=2$ имѣетъ безчисленное множество рѣшеній?

124. Опредѣлить значенія a и b, при которыхъ система ур-ій $ax-y-b$ и $4x+3y=10$ имѣетъ безчисленное множество рѣшеній?

125. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; обѣ наполняютъ его. Если первая дѣйствуетъ 8, а вторая 5 минутъ, то въ бассейнъ вливается 30 ведеръ; если же первая дѣйствуетъ 12, а вторая 7 минутъ, то вливается 46 ведеръ. Сколько ведеръ даетъ каждая труба въ минуту? Исправить задачу.

125. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую вода втекаетъ, черезъ вторую выливается. Если первая дѣйствуетъ 9, а вторая 5 минутъ, то въ бассейнъ втекаетъ 51 ведро; если же первая дѣйствуетъ 6, а вторая 7 минутъ, то втекаетъ 45 ведеръ. Сколько ведеръ протекаетъ черезъ каждую трубу въ минуту? Исправить задачу.

126. Наняты двѣ артели рабочихъ, изъ которыхъ въ первой двумя человѣками больше, чѣмъ во второй. Каждый рабочій первой артели получаетъ въ день 2 руб., а каждый рабочій второй артели рубль. Ежедневно вторая артель выручаетъ 10-ю рублями больше первой. Сколько рабочихъ въ каждой артели? Исправить задачу.

126. Наняты двѣ артели рабочихъ, изъ которыхъ въ первой тремя человѣками меньше, чѣмъ во второй. Каждый рабочій первой артели получаетъ за день 2 руб., а каждый рабочій второй артели 3 руб.. Ежедневно первая артель выручаетъ 15-ю рублями больше второй. Сколько рабочихъ въ каждой артели? Исправить задачу.

127. Куплено нѣсколько аршинъ матеріи по опредѣленной цѣнѣ. Если бы купили 3-мя аршинами больше, а за аршинъ заплатили бы 2-мя рублями дешевле, то на всю покупку издержали бы 12-ю рублями меньше. Также, если бы купили 6-ю аршинами меньше, но за аршинъ заплатили бы 4-мя руб. дороже, то вся покупка обошлась бы 12-ю рублями дешевле. Сколько куплено аршинъ и по какой цѣнѣ?

127. Куплено нѣсколько аршинъ матеріи по опредѣленной цѣнѣ. Если бы купили 4-мя аршинами меньше, а за аршинъ заплатили бы рублемъ дороже, то на всю покупку издержали бы 8-ю руб. меньше. А если бы купили 12-ю аршинами больше, но за аршинъ платили бы 3-мя рублями дешевле, то вся покупка обошлась бы 24-мя рублями дешевле. Сколько куплено аршинъ и по какой цѣнѣ?

128. Вычислить стороны прямоугольника, зная, что если одну изъ нихъ увеличить на 6 футовъ. а другую на 15 футовъ, то площадь увеличится на 128 кв. футовъ. Если же первую сторону уменьшить на 2 фута, а вторую на 5 футовъ, то площадь уменьшится на 25 кв. футовъ.

128. Вычислить стороны прямоугольника, зная, что если одну изъ нихъ увеличить на 8 фут., а другую на 6 фут., то площадь увеличится на 140 кв. футовъ. Если же первую сторону уменьшить на 4 фута, а вторую на 3 фута, то площадь уменьшится на 51 кв. футъ.

129. Торговецъ, имѣющій два сорта чаю, изъ которыхъ фунтъ одного стоитъ a рублей, а фунтъ другого b рублей, желаетъ составить m фунтовъ смѣси, цѣною по c рублей за фунтъ. Сколько онъ долженъ взять фунтовъ перваго и второго сорта?

129. Въ бассейнъ проведены три трубы. Первая даетъ въ каждый часъ по a ведеръ и можетъ наполнить бассейнъ въ m часовъ. Вторая даетъ въ часъ b ведеръ и третья c ведеръ. Узнать, на сколько часовъ нужно открыть одну послѣ другой вторую и третью трубы для того, чтобы бассейнъ наполнился также въ m часовъ?

130. Два курьера ѣдутъ равномѣрно по одному направленію со скоростями a и b верстъ въ часъ. Въ нѣкоторый моментъ первый

курьеръ находится въ мѣстѣ A, а второй въ мѣстѣ B, на разстояніяхъ $OA=c$ и $OB=d$ отъ нѣкотораго мѣста O. Узнать въ какомъ разстояніи отъ мѣста O и черезъ сколько часовъ отъ вышеуказаннаго момента произойдетъ встрѣча?

130. Работникъ, прослуживъ въ нѣкоторомъ мѣстѣ a дней и имѣя при себѣ сына въ продолженіе b дней, заработалъ вмѣстѣ съ нимъ p рублей. Въ другой разъ, пробывъ на томъ же мѣстѣ и при тѣхъ же условіяхъ c дней и имѣя при себѣ сына въ теченіе d дней, онъ заработалъ q рублей. Сколько получали за день отецъ и сынъ?

§ 4. Изслѣдованіе уравненій второй степени.

Квадратное уравненіе имѣетъ два корня, которыхъ выраженія въ общемъ случаѣ ирраціональны и взаимно сопряженны, т.-е отличаются знаками при общей ирраціональной части.

Корни квадратнаго уравненія могутъ быть или дѣйствительны и различны, или въ частномъ случаѣ равны, или мнимы. Это зависитъ во-первыхъ, отъ знака третьяго коэффиціента, а въ случаѣ, когда этотъ коэффиціентъ положителенъ, то отъ соотношенія всѣхъ трехъ коэффиціентовъ. Раньше въ теоріи квадратныхъ уравненій этотъ вопросъ былъ разсмотрѣнъ.

Иногда при рѣшеніи буквенныхъ квадратныхъ уравненій интересуются подыскиваніемъ частныхъ соизмѣримыхъ рѣшеній. Для этого нужно подобрать коэффиціенты такъ, чтобы въ выраженіяхъ корней получился подъ радикаломъ полный квадратъ. Общихъ способовъ для этого нѣтъ, но можно сдѣлать нѣкоторыя частныя указанія. Возьмемъ уравненіе $3x^2-8x-a=0$, котораго рѣшеніе есть $x=\frac{4\pm\sqrt{16+3a}}{3}$. Положимъ $16+3a=m^2$ и найдемъ отсюда $a=\frac{m^2-16}{3}$. Изъ этого видно, что, придавая числу m значенія 4, 5, 6,...., можемъ вычислить безконечное множество цѣлыхъ и дробныхъ значеній a, при которыхъ корни даннаго уравненія будутъ соизмѣримы.—Разсмотримъ еще уравненіе $x^2+ax+25=0$, которому соотвѣтствуетъ формула $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-100}}{2}$. Примемъ $a^2-10^2=m^2n^2$ и допустимъ разложеніе этого равенства на два: $a+10=m^2n$ и $a-10=n$. Отсюда имѣемъ $a=\frac{m^2+1}{2}\cdot n$ и $10=\frac{m^2-1}{2}\cdot n$, послѣ чего, исключая n, получимъ $a=\frac{m^2+1}{m^2-1}\cdot 10$. Если будемъ придавать числу m значенія 2,3,4,..., то получимъ тѣ значенія a, при которыхъ корни соизмѣримы.

Въ нижеслѣдующихъ задачахъ подобрать рядъ значеній буквы a такихъ, чтобы соотвѣтствующія задачамъ квадратныя уравненія имѣли дѣйствительные, положительные, соизмѣримые и притомъ цѣлые корни.

131. Нѣкто купилъ вина на a рублей. Если бы онъ на эти деньги купилъ 4-мя ведрами меньше, то ведро обошлось бы ему рублемъ дороже. Сколько онъ купилъ вина?

131. Нѣкто купилъ вина на a рублей. Если бы онъ на эти деньги купилъ двумя ведрами больше, то ведро обошлось бы ему рублемъ дешевле. Сколько онъ купилъ вина?

132. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы. Первая въ нѣкоторое время наполняетъ его, вторая во время двумя часами большее выливаетъ всю воду. При совмѣстномъ дѣйствіи обѣихъ трубъ бассейнъ наполняется въ a часовъ. Во сколько часовъ первая труба наполняетъ бассейнъ?

132. Въ бассейнъ проведены двѣ трубы. Первая въ нѣкоторое время наполняетъ его, вторая во время тремя часами меньшее выливаетъ всю воду. При совмѣстномъ дѣйствіи обѣихъ трубъ полный бассейнъ выливается въ a часовъ. Во сколько часовъ первая труба наполняетъ бассейнъ?

133. Высота прямоугольника на a футовъ больше его основанія, а площадь равна 30 кв. футамъ. Найти стороны.

133. Высота прямоугольника на a футовъ меньше его основанія, а площадь равна 70 кв. футамъ. Найти стороны.

134. Периметръ прямоугольника равенъ $2a$, а площадь 36 кв. футамъ. Найти стороны.

134. Периметръ прямоугольника равенъ $2a$, а площадь 225 кв. футамъ. Найти стороны.

Въ нижеслѣдующихъ задачахъ опредѣлить условія, при которыхъ корни уравненій будутъ дѣйствительными и положительными, а также подыскать для корней нѣкоторыя соизмѣримыя цѣлыя значенія, соотвѣтствующія частнымъ предположеніямъ.

135. Найти два числа, которыхъ сумма a, а произведеніе b.

135. Раздѣлить число a на такія двѣ части, чтобы сумма квадратовъ ихъ была b.

136. Въ данный квадратъ, котораго сторона a, вписать другой квадратъ, котораго сторона b.

136. По данной гипотенузѣ a построить прямоугольный треугольникъ, равновеликій квадрату, котораго сторона b.

137. Нѣкто на всѣ свои деньги купилъ товару и тотчасъ же продалъ, получивъ прибыли m рублей. На вырученныя деньги онъ купилъ того же товару и снова продалъ его по прежнимъ цѣнамъ. Послѣ этого у него оказалось n рублей. Сколько онъ имѣлъ денегъ вначалѣ? Разсмотрѣть особо случай, когда m отрицательно.

137. На m рублей куплено нѣсколько аршинъ сукна. Въ другой разъ на $m+n$ рублей купили сукна больше n аршинами и при этомъ заплатили за каждый аршинъ на a рублей дороже. Сколько куплено сукна въ первый разъ? Разсмотрѣть особо случай, когда n отрицательно.

138. Данъ кругъ радіуса R и внѣ его точка въ разстояніи d отъ центра. Провести черезъ эту точку сѣкущую въ кругу такъ, чтобы ея внутренній отрѣзокъ равнялся бы радіусу круга.

138. Вписать въ кругъ радіуса R прямоугольникъ, котораго площадь была бы равна площади квадрата со стороною k.

Въ нижеслѣдующихъ уравненіяхъ второй степени съ двумя неизвѣстными требуется опредѣлить тѣ дѣйствительныя значенія перемѣннаго x, при которыхъ перемѣнное y также дѣйствительно.

139. $x^2+y^2-2xy+x=0$

139. $4x^2-4xy+y^2+7x-6y+9=0$

140. $2x^2-2xy+y^2+2x-4y+1=0$

140. $2x^2+2xy+y^2-x-2y-5=0$

§ 5. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени.

Уравненіе $ax+by=c$, данное въ отдѣльности, имѣетъ безчисленное множество паръ корней. Значеніе одного неизвѣстнаго можетъ быть выбрано совершенно произвольно, а соотвѣтствующее значеніе другого неизвѣстнаго опредѣляется даннымъ уравненіемъ на основаніи сдѣланнаго выбора.

Сущность рѣшенія неопредѣленнаго уравненія состоитъ въ отысканіи цѣлыхъ значеній для обоихъ неизвѣстныхъ. Для этого необходимо, чтобы въ уравненіи, окончательно сокращенномъ коэффиціенты a и b при неизвѣстныхъ не имѣли никакого общаго множителя. Напр., уравненіе $6x-9y=17$ не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ, т.-е. x и y не могутъ быть одновременно цѣлыми.

Когда условіе возможности цѣлыхъ рѣшеній удовлетворяется то число системъ цѣлыхъ рѣшеній неограниченно.

Всѣ системы цѣлыхъ корней уравненія $ax+by=c$ заключены въ формулахъ $x=m\pm bt$, $y=n\mp at$, гдѣ m и n представляютъ одну какую-нибудь пару взаимно соотвѣтствующихъ другъ другу цѣлыхъ корней, а t есть произвольное цѣлое число. Въ формулу x-са входитъ коэффиціентъ b, соотвѣтствующій въ уравненіи y-ку, а въ формулу y ка входитъ коэффиціентъ a, соотвѣтствующій x-су. Одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ берется въ формулахъ съ перемѣной знака при немъ; поэтому, когда въ уравненіи знаки у коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ одинаковы, то въ формулахъ члены, содержащіе t, берутся съ разными знаками, и наоборотъ.

Видъ предыдущихъ формулъ, разрѣшающихъ данное уравненіе, показываетъ, что для составленія этихъ формулъ нужно знать только m и n, т.-е. одну пару цѣлыхъ корней уравненія, взаимно соотвѣтствующихъ одинъ другому. Поэтому, если удастся какимъ-нибудь способомъ найти подобную систему корней, то всѣ остальныя системы легко опредѣляются. Требуемая система можетъ быть нерѣдко найдена догадкой, а вообще ее можно найти посредствомъ послѣдовательныхъ подстановленій, на основаніи слѣдующей теоремы. Если въ уравненіи $ax+by=c$ выразимъ одно изъ неизвѣстныхъ, напр., x, черезъ другое въ видѣ $x=\frac{c-by}{a}$ и будемъ подставлять вмѣсто y рядъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ нуля и кончая числомъ $a-1$, то всегда, если только цѣлыя рѣшенія возможны, при одной изъ такихъ подстановокъ, числитель x-са раздѣлится нацѣло на его знаменателя.

Въ силу вышеуказанныхъ замѣчаній имѣется слѣдующій способъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ, называемый способомъ подстановленій: Нужно выразить изъ уравненія то неизвѣстное, котораго коэффиціентъ меньше, затѣмъ подставлять въ полученное дробное выраженіе вмѣсто другого неизвѣстнаго цѣлыя числа, начиная съ нуля и въ крайнемъ случаѣ до числа на единицу меньшаго знаменателя дроби, и, когда такимъ путемъ отыщется пара цѣлыхъ корней, то составить по этимъ корнямъ и по обоимъ коэффиціентамъ неизвѣстныхъ тѣ общія выраженія x-са и y-ка, которыя заключаютъ въ себѣ всѣ системы цѣлыхъ корней. Напр., имѣя уравненіе $9x-7y=-6$, находимъ $y=\frac{9x+6}{7}$, подставляемъ вмѣсто x числа 0, 1, 2, 3 и наконецъ при $x=4$ находимъ $y=6$; затѣмъ, замѣтивъ, что въ данномъ уравненіи коэффиціенты неизвѣстныхъ имѣютъ разные знаки, выписываемъ общія формулы $x=4+7t$ и $y=6+9t$ съ одинаковыми и притомъ, для удобства, положительными знаками членовъ, содержащихъ t. Придавая количеству t произвольныя, положительныя или отрицательныя значенія, можемъ составить сколько угодно паръ цѣлыхъ корней

Видъ общихъ формулъ $x=m\pm bt$ и $y=n\mp at$ показываетъ, что изъ нихъ получаются по цѣлому t цѣлыя x и y вслѣдствіе того, что неизвѣстныя входятъ въ эти формулы съ коэффиціентами, равными единицѣ, отчего вычисленіе x и y, не требуя дѣленій, и не даетъ въ результатахъ дробей. Поэтому, если бы удалось посредствомъ замѣны даннаго уравненія другими, совмѣстными съ нимъ, привести его къ уравненію съ коэффиціентомъ единицей при одномъ изъ неизвѣстныхъ, то послѣднее уравненіе разрѣшалось бы въ цѣлыхъ числахъ легко. Этого можно всегда достигнуть, уменьшая коэффиціенты послѣдовательными дѣленіями и вводя при этомъ вспомогательныя неизвѣстныя.

Такой способъ рѣшенія, называемый способомъ послѣдовательныхъ дѣленій, объясняется подробно въ курсахъ алгебры. Успѣхъ его основанъ на томъ, что при вычисленіяхъ по этому способу большій коэффиціентъ дѣлится на меньшій, меньшій на первый остатокъ, первый остатокъ на второй и т. д., а при такихъ дѣленіяхъ, когда притомъ коэффиціенты суть числа взаимно простыя, мы всегда дойдемъ до числа единицы. Въ курсахъ алгебры указываются также три случая, когда процессъ вычисленій можетъ быть упрощенъ. Чтобы напомнить общій способъ, возьмемъ примѣръ уравненія $5x-13y-36$. Выразивъ въ немъ неизвѣстное съ меньшимъ коэффиціентомъ и выдѣливъ изъ полученной дроби цѣлое число, получимъ $x=7+2y+\frac{1+3y}{5}$. Полагаемъ $\frac{1+3y}{5}=z$, отчего получаемъ съ одной стороны цѣлую формулу $x=7+2y+z$, а съ другой указанное подстановкой вспомогательное уравненіе между y и z. Преобразовавъ послѣднее такимъ же способомъ, получимъ $y=z+\frac{2z-1}{3}$. Здѣсь полагаемъ $\frac{2z-1}{3}=t$, отчего получается цѣлая формула $y=z+t$ и составляется еще самой подстановкой второе вспомогательное уравненіе между z и t. Преобразовавъ новое уравненіе, находимъ $z=t+\frac{t+1}{2}$. Здѣсь полагаемъ $\frac{t+1}{2}-u$, отчего получается цѣлая формула $z=t+u$ и составляется уравненіе, приводящееся также къ цѣлой формулѣ $t=2u-1$. Всѣ найденныя цѣлыя формулы мы выписываемъ въ обратномъ порядкѣ, начиная съ послѣдней, и при этомъ всѣ неизвѣстныя послѣдовательно выражаемъ черезъ послѣднее неизвѣстное u. Такимъ образомъ доходимъ наконецъ до формулъ $y=5u-2$ и $x=13u+2$, которыя составлены по типу вышеразсмотрѣнныхъ, разрѣшающихъ формулъ и могутъ отличаться отъ подобныхъ же формулъ, найденныхъ какимъ-нибудь другимъ способомъ рѣшенія, только частными значеніями количествъ m и n.

Если бы требовалось рѣшить неопредѣленное уравненіе не только въ цѣлыхъ числахъ, но еще непремѣнно въ положительныхъ или

въ отрицательныхъ, или такъ, чтобы одно неизвѣстное было положительно, а другое отрицательно, то нужно найти сначала разрѣшающія цѣлыя формулы, а затѣмъ подчинить ихъ подходящимъ неравенствамъ и рѣшить полученныя два неравенства, какъ совмѣстныя относительно входящаго въ нихъ неопредѣленнаго количества. Рѣшеніе неравенствъ дастъ предѣлы для этого количества, при чемъ предѣлы могутъ оказаться, какъ извѣстно изъ теоріи неравенствъ, или совпадающими, или ограничивающими, или въ исключительномъ случаѣ противорѣчащими. Принимая въ соображеніе найденные предѣлы неопредѣленнаго количества, нужно не забывать также, что это количество должно быть во всякомъ случаѣ цѣлымъ.

Обыкновенно неопредѣленныя уравненія рѣшаются только въ положительныхъ числахъ. При этомъ оказывается, что уравненіе вида $ax+by=c$, въ которомъ всѣ коэффиціенты положительны, имѣетъ ограниченное число рѣшеній, уравненіе $ax-by=\pm c$, въ которомъ знаки коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ различны, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, и уравненіе $ax+by=-c$, въ которомъ знакъ извѣстнаго члена противоположенъ общему знаку коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, совсѣмъ не имѣетъ положительныхъ рѣшеній.

Рѣшить слѣдующія уравненія въ цѣлыхъ числахъ способомъ подстановленій:

141. $x+2y=7$ 141. $3x-y=10$ **142.** $y-5x=12$ 142. $7y+x=15$
143. $3x-5y=0$ 143. $7y-4x=0$ **144.** $5x+8y=0$ 144. $6x+5y=0$
145. $2x+3y=13$ 145. $3x+5y=30$ **146.** $5y-7x=21$ 146. $4y-9x=35$
147. $7x+13y=71$ 147. $8x+13y=82$
148. $14x-9y=11$ 148. $11y-18x=23$

Рѣшить слѣдующія уравненія въ цѣлыхъ числахъ способомъ послѣдовательныхъ дѣленій:

149. $2x+3y=7$ 149. $3x+2y-9$ **150.** $3x-4y=11$ 150. $4x-3y=5$
151. $5x+3y=6$ 151. $7x+5y=10$ **152.** $7x-4y=3$ 152. $3x+5y=20$
153. $7x+5y=12$ 153. $5x-8y=6$ **154.** $5x-11y=4$ 154. $7x+11y=75$
155. $11x+8y=73$ 155. $8x-13y=63$
156. $11x-7y=-31$ 156. $12y-7x=-31$

Могутъ ли быть рѣшены въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ слѣдующія уравненія:

157. $2x+6y=25$ **157.** $7x-14y=10$
158. $6x+11y=-48$ **158.** $-5x-11y=4$

159. $8x+7y=3$
160. $9x-6y \quad 17$
161. $10x+13y=16$
162. $13x-15y-45$
163. $8x+6y=12$
164. $15x-10y=25$

159. $9x+5y=2$
160. $12x-9y=8$
161. $8x+9y=15$
162. $12x-41y=24$
163. $9x+6y=15$
164. $15x-25y=30$

Слѣдующія уравненія рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ:

165. $4x+11y-47$
166. $12x-7y \quad 45$
167. $11x+18y \quad 120$
168. $15x-49y \quad 11$
169. $18x-35y=30$
170. $45x+27y \quad 117$
171. $\frac{3x}{5}+\frac{2y}{3}=37$
172. $\frac{x+15y}{x-21}=-20$
173. $\frac{3x-14}{2}=\frac{2y-0,5}{5}$
174. $\frac{9x-2\frac{3}{4}y-1}{7}=\frac{3x \quad y+1}{4}$

165. $8x+3y=76$
166. $13x-9y=29$
167. $17x+25y=160$
168. $16x-37y=5$
169. $12x+55y=200$
170. $56x-91y=945$
171. $\frac{3x}{4}+\frac{5y}{2}=23$
172. $\frac{13y-62x}{3x-12}=-26$
173. $\frac{4x-5}{2}=\frac{2,5y-3}{3}$
174. $\frac{5x+3\frac{1}{3}+2y}{3}=\frac{x+6\frac{1}{3}y+11}{6}$

Найти наименьшія положительныя числа, удовлетворяющія слѣдующимъ уравненіямъ:

175. $17x-29y=100$
176. $13x-15y=2$
177. $52x+64y-388$
178. $16x-25y=1$
179. $41x-36y=187$
180. $9x+20y=547$

175. $8x-27y=201$
176. $17x-7y=6$
177. $33x+39y=570$
178. $53x-38y=1$
179. $100x-63y=90$
180. $31x+21y=1770$

Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ слѣдующія системы уравненій:

181. $2x-5y=5,\ 2y-3z=1$
182. $8x-5y=6,\ 7z+3y=13$
183. $3x+y+z=14,\ 5x+3y+z=28$

181. $5x-11y=1,\ 3x-4z=0$
182. $20y-21x=38,\ 4z+3x=34$
183. $x+y+z=30,\ 8x+9y+z=194$

184. $4x+y+3z=30,\ 7x+y+6z=51$

184. $x+12y+13z=78,\ x+7y+8z=48.$

185. $x=5y+3=11z+7$ 185. $x=12y+7=17z+2$

186. $3x=8y+7=7z+4$ 186. $5x=6y+1=7z+4$

187. $x+2y+3z=20,\ 3x+5y+4z=37$

187. $4x+3y+5z=41,\ 2x+5y+z=35$

188. $2x+14y-7z=341,\ 10x+4y+9z=473$

188. $2x+5y+3z=108,\ 3x-3y+7z=96$

189. $x-2y-z=7,\ 2y-3z+u=7,\ 4z+x-u=2$

189. $x+2y+3z=17,\ 3y+z-2u=4,\ 2x+3z+u=17$

190. $2x-y+5u=18,\ 3y+z+2u=16,\ x+2y-2z=4$

190. $x+y+z=16,\ y-z+u=1,\ x+y-u=9$

191. Разложить число 200 на два слагаемыхъ, изъ которыхъ одно дѣлилось бы безъ остатка на 7, а другое на 13.

191. Разложить число 116 на два слагаемыхъ, изъ которыхъ одно дѣлилось бы безъ остатка на 8, а другое на 5.

192. Сколькими и какими способами можно заплатить 149 р.. имѣя билеты по 3 р. и по 5 р.?

192. Сколькими и какими способами можно заплатить 200 руб., имѣя билеты по 3 и по 10 р.?

193. Найти два числа, которыхъ разность 10, зная, что уменьшаемое кратно 8-ми, а вычитаемое кратно 17-ти.

193. Найти два числа, которыхъ разность 12, зная, что уменьшаемое кратно 7-ми, а вычитаемое кратно 15-ти.

194. Сколькими и какими способами можно взвѣсить грузъ въ 114 фунтовъ, имѣя гири въ 5 и 3 фунта?

194. Сколькими и какими способами можно взвѣсить грузъ въ 87 фунтовъ, имѣя гири въ 5 и 2 фунта?

195. Двумъ артелямъ рабочихъ выдано 330 рублей. Каждый рабочій первой артели получилъ 16 руб., а каждый рабочій второй 9 руб.. Сколько было рабочихъ въ каждой артели?

195. Двумъ артелямъ рабочихъ выдано 270 рублей. Каждый рабочій первой артели получилъ 13 руб., а каждый рабочій второй 8 руб.. Сколько было рабочихъ въ каждой артели?

196. Найти двѣ дроби, которыхъ сумма равна $\frac{19}{24}$, а знаменатели суть 12 и 24.

196. Найти двѣ дроби, которыхъ разность равна $\frac{82}{143}$, а знаменатели суть 11 и 13.

197. Сколько можно помѣстить пятикопѣечныхъ и двухкопѣечныхъ монетъ на протяженіи аршина, полагая, что діаметръ первыхъ равенъ $\frac{13}{16}$ вершка, а діаметръ вторыхъ $\frac{5}{8}$ вершка?

197. Сколько двугривенныхъ и пятиалтынныхъ можно помѣстить на протяженіи фута, полагая, что діаметръ первыхъ равенъ $\frac{9}{10}$ дюйма, а діаметръ вторыхъ $\frac{5}{6}$ дюйма.

198. Дробь $\frac{7}{18}$ равна разности двухъ дробей, изъ которыхъ у одной знаменатель 9, а у другой 10. Найти эти дроби.

198. Дробь $2\frac{3}{20}$ состоитъ изъ двухъ дробей, изъ которыхъ у одной знаменатель 4, а у другой 5. Найти эти дроби.

199. Изъ двухъ сортовъ серебра 56 и 84 пробы нужно образовать серебро 72 пробы. Какъ составить сплавъ въ цѣлыхъ фунтахъ?

199. Изъ чистаго серебра и серебра 80 пробы нужно образовать серебро 84 пробы. Какъ составить сплавъ въ цѣлыхъ фунтахъ?

200. Изъ чистаго спирта и спирта въ 60 градусовъ нужно приготовить смѣсь въ 75 градусовъ. Какъ составить смѣсь въ цѣлыхъ ведрахъ?

200. Изъ спирта въ 90 и 55 градусовъ нужно приготовить смѣсь въ 65 градусовъ. Какъ составить смѣсь въ цѣлыхъ ведрахъ?

201. При какомъ значеніи x дробь $\frac{5x-1}{12}$ обращается въ положительное четное число?

201. При какомъ значеніи x дробь $\frac{1+5x}{8}$ обращается въ положительное нечетное число?

202. Найти общій видъ чиселъ, кратныхъ пяти, которыя при дѣленіи на 8 даютъ въ остаткѣ 1.

202. Найти общій видъ чиселъ, кратныхъ семи, которыя при дѣленіи на 5 даютъ въ остаткѣ 2.

203. При какомъ значеніи x дробь $\frac{3-7x}{10}$ обращается въ положительное число, дѣлящееся на 4 съ остаткомъ 3?

203. При какомъ значеніи x дробь $\frac{2-9x}{13}$ обращается въ поло жительное число, дѣлящееся на 7 съ остаткомъ 2?

204. Найти общій видъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 3 даютъ въ остаткѣ 2, а при дѣленіи на 7 въ остаткѣ 3.

204. Найти общій видъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 7 даютъ въ остаткѣ 4, а при дѣленіи на 8 въ остаткѣ 3.

205. *A* долженъ получить съ *B* 25 рублей. Но у *B* есть только 40 трехрублевыхъ билетовъ, а у *A* только 12 десятирублевыхъ. Сколькими и какими способами они могутъ разсчитаться, обмѣнивая билеты?

205. *B* долженъ получить съ *A* 41 рубль. Но у *A* есть только 30 пятирублевыхъ билетовъ, а у *B* только 25 трехрублевыхъ. Сколькими и какими способами они могутъ разсчитаться, обмѣнивая билеты?

206. Стрѣлокъ за каждый удачный выстрѣлъ получаетъ по 8 коп., а за каждый неудачный самъ платитъ по 27 к.. Сдѣлавъ нѣкоторое число выстрѣловъ, меньшее 120, онъ выручилъ 97 коп. Сколько было удачныхъ выстрѣловъ и сколько неудачныхъ?

206. Стрѣлокъ за каждый удачный выстрѣлъ получаетъ по 15 к. а за каждый неудачный самъ платитъ по 34 коп.. Сдѣлавъ нѣкоторое число выстрѣловъ, меньшее 150, онъ выручилъ 1 руб. 14 к.. Сколько было удачныхъ выстрѣловъ и сколько неудачныхъ?

207. Въ училищѣ число учениковъ больше 100, но меньше 200. Если ихъ разсадить на скамьи по 10 человѣкъ на каждую, то для одной скамьи недостанетъ полнаго числа, а сядутъ только 5 человѣкъ. Если же разсадить по 13 человѣкъ, то на одну скамью сядутъ 6 человѣкъ. Сколько учениковъ?

207. Въ училищѣ число учениковъ больше 100, но меньше 200. Если ихъ разсадить на скамьи по 12 человѣкъ на каждую, то для одной скамьи недостанетъ полнаго числа, а сядутъ только 9 человѣкъ. Если же разсадить по 10 человѣкъ, то на одну скамью сядутъ 7 человѣкъ. Сколько учениковъ?

208. Нѣкто купилъ лошадей и воловъ на 1770 рублей, при чемъ за каждую лошадь платилъ по 31 рублю, а за каждаго вола по 22 р.. Извѣстно притомъ, что число купленныхъ лошадей кратно 10. Сколько куплено лошадей и воловъ?

208. Нѣкто купилъ лошадей и воловъ на 2603 рубля, при чемъ за каждую лошадь платилъ по 54 рубля, а за каждаго вола по 23 р.. Извѣстно притомъ, что число купленныхъ лошадей кратно 7 Сколько куплено лошадей и воловъ?

209. Извѣстно, что, откладывая по окружности шестую ея часть и десятую по противоположнымъ направленіямъ, можно найти пятнадцатую ея часть. Какими способами можетъ быть отдѣлена эта искомая часть, если производить неоднократно послѣдовательныя отложенія данныхъ частей?

209. Извѣстно, что, откладывая по окружности пятую ея часть и шестую по противоположнымъ направленіямъ, можно найти тридцатую ея часть. Какими способами можетъ быть отдѣлена эта искомая часть, если производить неоднократно послѣдовательныя отложенія данныхъ частей?

210. При вращеніи двухъ зацѣпляющихся зубчатыхъ колесъ изъ которыхъ одно имѣетъ 19 зубцовъ, и другое 23, первый зубецъ одного колеса попалъ въ первый промежутокъ другого Сколько полныхъ оборотовъ должны сдѣлать оба колеса, чтобы первый зубецъ попалъ опять въ первый промежутокъ, сколько чтобы попалъ во второй промежутокъ, въ третій и т. д.?

210. При вращеніи двухъ зацѣпляющихся зубчатыхъ колесъ, изъ которыхъ одно имѣетъ 25 зубцовъ, а другое 36, первый зубецъ одного колеса попалъ въ первый промежутокъ другого. Сколько полныхъ оборотовъ должны сдѣлать оба колеса, чтобы первый зубецъ попалъ опять въ первый промежутокъ, сколько, чтобы попалъ во второй промежутокъ, въ третій и т. д.?

211. Разложить число 30 на три слагаемыхъ такъ, чтобы сумма произведеній перваго слагаемаго на 7, второго на 19 и третьяго на 38 была равна 745.

211. Разложить число 50 на 3 слагаемыхъ такъ, чтобы сумма произведеній перваго слагаемаго на 8, второго на 13 и третьяго на 42 была равна 1125.

212. Сколько нужно взять серебра 82-й, 66-й и 54-й пробы, чтобы сдѣлать слитокъ въ 30 фунтовъ 72-й пробы?

212. Сколько нужно взять серебра 56-й, 72-й и 62-й пробы, чтобы составить 27 фунтовъ 64-й пробы?

213. Найти трехзначное число, сумма цифръ котораго 20; если

изъ этого числа вычесть 16 и остатокъ раздѣлить на 2, то получится число, обозначенное прежними цифрами въ обратномъ порядкѣ.

213. Найти трехзначное число, сумма цифръ котораго 16; если изъ этого числа вычесть 80 и разность умножить на 2, то получится число, обозначенное прежними цифрами въ обратномъ порядкѣ.

214. Продано 120 стопъ бумаги трехъ сортовъ за 914 рублей. Стопа перваго сорта продавалась за $13\frac{1}{2}$ руб., второго за $9\frac{1}{2}$ руб. и третьяго за $3\frac{3}{4}$ руб.. Сколько продано бумаги каждаго сорта?

214. Продано 100 стопъ бумаги трехъ сортовъ за 465 рублей. Стопа перваго сорта продавалась за $6\frac{3}{4}$ руб., второго за 6 руб и третьяго за $4\frac{1}{2}$ руб.. Сколько продано бумаги каждаго сорта?

215. Найти трехзначное число, сумма цифръ котораго 16; если къ этому числу прибавить 99, то получится число, обозначенное тѣми же цифрами въ обратномъ порядкѣ ихъ.

215. Найти трехзначное число, сумма цифръ котораго 15; если изъ этого числа вычесть 297, то получится число, обозначенное тѣми же цифрами въ обратномъ порядкѣ ихъ.

216. Найти наименьшее изъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 3, 4, 5 даютъ въ остаткахъ 1, 2 и 3.

216. Найти наименьшее изъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 3, 7 и 10 даютъ въ остаткахъ 2, 3 и 9.

217. Найти общій видъ чиселъ, которыя, будучи кратны 5-ти, при дѣленіи на 8, 11 и 3 даютъ остатки 1, 3 и 1.

217. Найти общій видъ чиселъ, которыя, будучи кратны 7 ми, при дѣленіи на 4, 5 и 9 даютъ остатки 3, 2 и 3.

218. Найти наименьшее изъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 5, 6, 7 и 8 даютъ остатки 3, 1, 0 и 5.

218. Найти наименьшее изъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 3, 4, 5 и 7 даютъ остатки 1, 2, 3 и 4.

219. Заплатить 25 копѣекъ монетами въ 2, 3 и 5 копѣекъ.

219. Заплатить 61 копѣйку монетами въ 3, 5 и 10 копѣекъ.

220. Разложить 2 въ сумму трехъ дробей, которыхъ знаменатели 3, 6 и 8.

220. Разложить 2 въ сумму трехъ дробей, которыхъ знаменатели 2, 5 и 10.

ОТДѢЛЕНІЕ XII.

ПРОГРЕССІИ.

§ 1. Разностныя прогрессіи.

Прогрессіей разностной или ариѳметической называется рядъ количествъ a, b, c....., u или a_1, a_2, a_3,...., a_n, въ которомъ каждое слѣдующее количество составляется посредствомъ сложенія предъидущаго съ однимъ и тѣмъ же постояннымъ количествомъ. Послѣднее называется разностью прогрессіи. Когда разность положительна, то прогрессія называется восходящей, а когда разность отрицательна, то нисходящей. Если три количества, x, y и z составляютъ разностную прогрессію, то они связаны уравненіемъ $y-x=z-y$, выражающимъ опредѣленіе прогрессіи.

Обозначая первый членъ прогрессіи черезъ a (или a_1), разность черезъ r (или d), число членовъ черезъ n, послѣдній членъ черезъ u (или a_n) и сумму черезъ s (или s_n), имѣемъ между пятью количествами два уравненія:

$$u=a+r(n-1),\quad \text{или при другихъ}\quad a_n=a_1+d(n-1).$$

$$s=\frac{(a+u)n}{2},\quad \text{обозначеніяхъ},\quad s_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Зная три изъ указанныхъ пяти количествъ и подставляя ихъ въ эти уравненія, можно найти два остальныхъ количества.

1. Найти 15-й членъ и сумму 15-ти членовъ прогрессіи 2, 5, 8, 11,....

1. Найти 20-й членъ и сумму 20-ти членовъ прогрессіи 3, 7, 11, 15,....

2. Найти 18-й членъ и сумму 18-ти членовъ прогрессіи —3, —5, —7, —9,....

2. Найти 13-й членъ и сумму 13-ти членовъ прогрессіи —2, —6, —10, —14,....

3. Найти сумму всѣхъ двузначныхъ чиселъ отъ 21 до 50 включительно.

3. Найти сумму всѣхъ двузначныхъ чиселъ отъ 36 до 60 включительно.

4. Найти сумму всѣхъ четныхъ чиселъ до 200 включительно.

4. Найти сумму всѣхъ нечетныхъ чиселъ до 175 включительно.

5. Найти сумму n членовъ прогрессіи a, $2a-b$, $3a-2b$.....

5. Найти сумму n членовъ прогрессіи b, $2b-a$, $3b-2a$,....

6. Найти n-ое нечетное число и сумму n нечетныхъ чиселъ.

6. Найти n-ое четное число и сумму n четныхъ чиселъ.

7. Между числами 3 и 24 вставить 6 среднихъ ариѳметическихъ, т.-е. такъ, чтобы искомыя числа вмѣстѣ съ данными составили разностную прогрессію.

7. Между числами 17 и 82 вставить 12 среднихъ ариѳметическихъ.

8. Между числами 27 и —25 вставить 10 среднихъ ариѳметическихъ.

8. Между числами 17 и —19 вставить 17 среднихъ ариѳметическихъ.

9. Найти сумму n членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ $2+3m$.

9. Найти сумму n членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ $3-2m$.

10. Найти сумму n членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ $a-2bm$.

10. Найти сумму n членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ $b+3am$.

По первому члену, разности и числу членовъ опредѣлить послѣдній членъ и сумму:

11. $a=7$, $r=4$, $n=13$ 11. $a=2$, $r=2$, $n=40$

12. $a_1=56$, $d=-3$, $n=11$ 12. $a_1=63$, $d=-5$, $n=8$

По послѣднему члену, разности и числу членовъ опредѣлить первый членъ и сумму:

13. $u=149$, $r=7$, $n=22$ 13. $u=65$, $r=5$, $n=12$

14. $a_{40}=-22$, $d=-2$, $n=40$ 14. $a_{58}=13$, $d=-3$, $n=58$

По первому члену, послѣднему и суммѣ опредѣлить разность и число членовъ:

15. $a=2$, $u=87$, $s=801$ 15. $a=-13$, $u=27$, $s=77$

16. $a_1=10$, $a_n=-9$, $s_n=10$ 16. $a_1=160$, $a_n=17$, $s_n=1062$

По первому члену, послѣднему и числу членовъ опредѣлить разность прогрессіи и сумму членовъ:

17. $a=3$, $u=63$, $n=16$ 17. $a=1$, $u=81$, $n=17$

18. $a_1=36$, $a_{15}=8$, $n=15$ 18. $a_1=169$, $a_{24}=8$, $n=24$

По первому члену, числу членовъ и суммѣ опредѣлить послѣдній членъ и разность:

19. $a=10$, $n=14$, $s=1050$ 19. $a=-40$, $n=20$, $s=-40$

20. $a_1=-45$, $n=31$, $s_{31}=0$ 20. $a_1=16$, $n=9$, $s_9=0$

По послѣднему члену, числу членовъ и суммѣ опредѣлить первый членъ и разность:

21. $u=21$, $n=7$, $s=105$ 21. $u=92$, $n=11$, $s=517$

22. $a_{16}=105$, $n=16$, $s_{16}=840$ 22. $a_{33}=-143$, $n=33$, $s_{33}=-2079$

По первому члену, разности и послѣднему члену опредѣлить число членовъ и сумму:

23. $a=4$, $r=5$, $u=49$ 23. $a=1$, $r=3$, $u=22$

24. $a_1=14{,}5$, $d=0{,}7$, $a_n=32$ 24. $a_1=-28$, $d=7$, $a_n=28$

По разности, числу членовъ и суммѣ ихъ опредѣлить первый и послѣдній члены:

25. $r=6$, $n=10$, $s=340$ 25. $r=\frac{1}{3}$, $n=50$, $s=425$

26. $d=\frac{1}{2}$, $n=25$, $s_{25}=-75$ 26. $d=-\frac{3}{4}$, $n=33$, $s_{33}=-33$

По первому члену, разности прогрессіи и суммѣ членовъ опредѣлить число членовъ и послѣдній членъ:

27. $a=2$, $r=5$, $s=245$ 27. $a=40$, $r=-4$, $s=180$

28. $a_1=41$, $d=2$, $s_n=4784$ 28. $a_1=18$, $d=6$, $s_n=1782$

По разности прогрессіи, послѣднему члену и суммѣ членовъ опредѣлить число членовъ и первый членъ:

29. $r=3$, $u=29$, $s=155$ 29. $r=5$, $u=77$, $s=623$

30. $d=4$, $a_n=88$, $s_n=1008$ 30. $d=1\frac{1}{2}$, $a_n=45$, $s_n=682\frac{1}{2}$

31. Третій членъ прогрессіи равенъ 25, а десятый —3. Найти первый членъ и разность.

31. Пятый членъ прогрессіи равенъ 13, а девятый 19. Найти первый членъ и разность.

32. Въ прогрессіи даны члены — четвертый 10 и седьмой 19. Найти сумму десяти членовъ.

32. Въ прогрессіи даны члены пятый —8 и семнадцатый 28 Найти сумму пятнадцати членовъ.

33. Четвертый членъ прогрессіи 9, а девятый 6. Сколько нужно взять членовъ, чтобы сумма ихъ равнялась 54?

33. Десятый членъ прогрессіи 4, а девятнадцатый —32. Сколько нужно взять членовъ, чтобы сумма ихъ равнялась 180?

34. Сумма третьяго и седьмого членовъ прогрессіи равна 4 а сумма второго и четырнадцатаго равна —8. Найти прогрессію

34. Сумма четвертаго и десятаго членовъ прогрессіи равна 44 а сумма второго и пятнадцатаго равна 53. Найти прогрессію.

35. Найти разность прогрессіи, которой первый членъ равенъ 100, а сумма шести первыхъ членовъ въ пять разъ больше суммы слѣдующихъ шести членовъ.

35. Найти первый членъ прогрессіи, которой разность равна 4 а сумма пяти первыхъ членовъ въ 3 раза меньше суммы слѣдующихъ пяти членовъ.

36. Составить такую прогрессію отъ 1 до 21, чтобы сумма всѣхъ членовъ ея относилась къ суммѣ членовъ между 1 и 21, какъ 11 : 9.

36. Составить такую прогрессію отъ 1 до 29, чтобы сумма всѣхъ членовъ ея относилась къ суммѣ членовъ между 1 и 29, какъ 4 : 3.

37. Первый членъ прогрессіи равенъ 1; сумма m первыхъ членовъ ея относится къ суммѣ n членовъ, какъ $m^2:n^2$. Найти прогрессію.

37. Первый членъ прогрессіи равенъ 2; сумма m первыхъ членовъ ея относится къ суммѣ n членовъ, какъ $m(m+1):n(n+1)$. Найти прогрессію.

38. Найти сумму $m+n$ членовъ прогрессіи, въ которой m-й членъ равенъ n, а n-й членъ равенъ m.

38. Найти сумму $m-n$ членовъ прогрессіи, въ которой сумма m членовъ равна n, а сумма n членовъ равна m.

39. Показать, что если a^2, b^2 и c^2 составляютъ разностную прогрессію, то и дроби $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также составляютъ разностную прогрессію.

39. Показать, что если a, b и c составляютъ разностную прогрессію, то справедливо равенство $\frac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

40. Если обозначимъ черезъ S_1, S_2 ...., S_k суммы n членовъ разностныхъ прогрессій, которыхъ первые члены суть соотвѣтственно

чѣмъ въ предшествующую. Если два тѣла начали падать съ одной высоты, спустя 4 секунды одно послѣ другого, то черезъ сколько секундъ они будутъ другъ отъ друга на разстояніи 274,4 метра?

49. Найти предѣлъ выраженія $\frac{1}{n}\left[\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\dots+\frac{1}{n}\right]$, въ которомъ n есть безконечно возрастающее цѣлое число.

49. Найти предѣлъ выраженія $k[a+(a+k)+(a+2k)+\dots+ +(a+(n-1)k)]$, въ которомъ $k=\frac{b-a}{n}$ и n есть безконечно возрастающее цѣлое число.

50. Данъ треугольникъ ABC, въ которомъ основаніе $AC=b$ и высота $BD=h$. Дѣлимъ высоту на n равныхъ частей, проводимъ черезъ точки дѣленія параллели къ основанію и строимъ на этихъ параллеляхъ прямоугольники, содержащіеся каждый между двумя смежными параллелями. Опредѣлить площадь треугольника какъ предѣлъ суммы площадей прямоугольниковъ.

50. Данъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ ABC, въ которомъ катеты $AC=BC=b$. Отложивъ отъ A на AC часть $AD=a$, проводимъ DE параллельно BC, чѣмъ отдѣляемъ отъ треугольника прямоугольную трапецію $DEBC$. Опредѣлить площадь этой трапеціи какъ предѣлъ суммы площадей прямоугольниковъ.

§ 2. Кратныя прогрессіи.

Прогрессіей кратной или геометрической называется рядъ количествъ a, b, c, d,...., u, или a_1, a_2, a_3,..., a_n, въ которомъ каждое слѣдующее количество составляется посредствомъ умноженія предъидущаго на одно и то же постоянное количество. Послѣднее называется знаменателемъ прогрессіи. Когда знаменатель больше единицы, то прогрессія называется восходящей, а когда знаменатель меньше единицы, то нисходящей. Если три количества x, y и z составляютъ кратную прогрессію, то они связаны уравненіемъ $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$, выражающимъ опредѣленіе прогрессіи.

Обозначая первый членъ прогрессіи черезъ a (или a_1), знаменателя черезъ q, число членовъ черезъ n, послѣдній членъ черезъ u (или a_n) и произведеніе членовъ черезъ p (или p_n), имѣемъ между пятью количествами два уравненія:

$u=aq^{n-1}$, или при другихъ $a_n=a_1q^{n-1}$
$p=\sqrt{(au)^n}$, обозначеніяхъ, $p_n=\sqrt{(a_1a_n)^n}$.

Эти уравненія вполнѣ сходны съ двумя преждеуказанными уравненіями разностныхъ прогрессій и отличаются лишь повышеніемъ порядка дѣйствій.

Для опредѣленія же суммы кратной прогрессіи имѣемъ особое уравненіе, которое въ случаѣ восходящей прогрессіи берется въ видѣ

$$s=\frac{uq-a}{q-1} \text{ или } s_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1},$$

а въ случаѣ нисходящей прогрессіи замѣняется другой формой

$$s=\frac{a-uq}{1-q} \text{ или } s_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q},$$

полученной черезъ перемѣну знаковъ въ членахъ дроби.

51. Найти сумму 10-ти членовъ прогрессіи 10, 20, 40,....

51. Найти сумму 8-ми членовъ прогрессіи 5, 15, 45,....

52. Найти сумму 7-ми членовъ прогрессіи —4, 16, —64,....

52. Найти сумму 10-ти членовъ прогрессіи 3, —6, 12,....

53. Найти сумму 8-ми членовъ прогрессіи 3, —1, $\frac{1}{3}$,....

53. Найти сумму 11-ти членовъ прогрессіи —2, 1, $-\frac{1}{2}$,....

54. Найти сумму 5-ти членовъ прогрессіи $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1, $\sqrt{\frac{3}{2}}$,....

54. Найти сумму 7-ми членовъ прогрессіи $\sqrt{\frac{5}{6}}$, 1, $\sqrt{\frac{6}{5}}$,....

55. Найти сумму n членовъ прогрессіи $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$,....

55. Найти сумму n членовъ прогрессіи $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,....

56. Найти сумму n членовъ прогрессіи $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}$,...

56. Найти сумму n членовъ прогрессіи $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1,....

57. Найти произведеніе 9-ти членовъ прогрессіи $\frac{81}{8}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{9}{2}$,....

57. Найти произведеніе 5-ти членовъ прогрессіи $\frac{32}{125}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{8}{5}$,....

58. Найти произведеніе 11-ти членовъ прогрессіи $\frac{a}{b}$, $-\frac{b}{a}$, $\frac{b^3}{a^3}$,....

58. Найти произведеніе 9-ти членовъ прогрессіи $\frac{a^3}{b^2}$, —1, $\frac{b}{a^3}$,....

59. Между числами 47 и 1269 вставить два среднихъ геометрическихъ.

59. Между числами 31 и 496 вставить три среднихъ геометрическихъ.

60. Между числами $\frac{a}{b^2}$ и $\frac{b}{a^2}$ вставить пять среднихъ геометрическихъ.

60. Между числами $\frac{b^2}{a^3}$ и $\frac{a^2}{b^3}$ вставить девять среднихъ геометрическихъ.

61. Найти сумму 6-ти членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ 3.2^{m-1}.

61. Найти сумму 5-ти членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ 2.5^{m-1}.

62. Найти сумму n членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ $(-1)^m a^{m-1} b^{k-m+1}$.

62. Найти сумму n членовъ прогрессіи, которой m-й членъ равенъ $(-1)^m a^{k-m+1} b^{m-1}$.

Зная послѣдній членъ, знаменателя прогрессіи и число членовъ найти первый членъ и сумму (или произведеніе):

63. $u=128$, $q=2$, $n=7$ — 63. $u=78125$, $q=5$, $n=8$

64. $a_5=\frac{2}{27}$, $q=-\frac{2}{3}$, $n=5$ — 64. $a_6=-243$, $q=-\frac{3}{2}$, $n=6$

Зная первый и послѣдній члены прогрессіи и число ея членовъ найти знаменателя и сумму (или произведеніе):

65. $a=3$, $u=12288$, $n=5$ — 65. $a=8$, $u=10368$, $n=5$

66. $a_1=81$, $a_6=-10\frac{2}{3}$, $n=6$ — 66. $a_1=\frac{1}{64}$, $a_6=-\frac{16}{243}$, $n=6$

Зная знаменателя прогрессіи, число ея членовъ и сумму (или произведеніе), найти первый и послѣдній члены:

67. $q=2$, $n=7$, $s=635$ — 67. $q=-2$, $n=8$, $s=85$

68. $q=-\frac{1}{2}$, $n=8$, $p_8=\frac{1}{16}$ — 68. $q=\frac{1}{3}$, $n=6$, $p_6=27$

Зная первый и послѣдній члены прогрессіи и знаменателя ея найти число членовъ и сумму (или произведеніе):

69. $a=3$, $q=2$, $u=96$ — 69. $a=5$, $q=3$, $u=405$

70. $a_1=9$, $q=\frac{2}{3}$, $a_n=\frac{32}{27}$ — 70. $a_1=\frac{3}{8}$, $q=-4$, $a_n=96$.

Зная первый и послѣдній члены прогрессіи и сумму ея (или произведеніе), найти знаменателя и число членовъ:

71. $a=2$, $u=1458$, $s=2186$ 71. $a=1$, $u=2401$, $s=2801$

72. $a_1=3$, $a_n=96$, $p_n=288^3$ 72. $a_1=2$, $a_n=1458$, $p_n=2^3.3^{9}$

Зная первый членъ, знаменателя прогрессіи и сумму (или произведеніе), найти послѣдній членъ и число членовъ:

73. $a=7$, $q=3$, $s=847$ 73. $a=8$, $q=2$, $s=4088$

74. $a_1=2$, $q=-3$, $p_n=-2^6.3^{15}$ 74. $a_1=3$, $q=-2$, $p_n=3^5.2^{10}$

Зная послѣдній членъ, знаменателя и сумму (или произведеніе), найти первый членъ и число членовъ:

75. $u=-216$, $q=-6$, $p=46656$ 75. $u=250$, $q=5$, $p=250000$

76. $a_n=32768$, $q=4$, $s_n=43690$ 76. $a_n=1215$, $q=-3$, $s_n=915$

Зная первый членъ, число членовъ и сумму (или произведеніе), найти знаменателя и послѣдній членъ:

77. $a=15$, $n=4$, $p=1800^2$ 77. $a=12$, $n=4$, $p=3888^2$

78. $a_1=12$, $n=3$, $s_n=372$ 78. $a_1=15$, $n=3$, $s_n=105$

Зная послѣдній членъ, число членовъ и сумму (или произведеніе), найти знаменателя и первый членъ:

79. $u=-\frac{32}{9}$, $n=6$, $p=-2^{15}3^3$ 79. $n=-\frac{243}{2}$, $n=6$, $p=-2^9 3^{15}$

80. $a_3=135$, $n=3$, $s_n=195$ 80. $a_3=8$, $n=3$, $s_n=14$

81. Первый членъ прогрессіи равенъ 1; сумма третьяго и пятаго членовъ 90. Найти прогрессію.

81. Первый членъ прогрессіи равенъ 3; разность между седьмымъ и четвертымъ членами 168. Найти прогрессію.

82. Сумма перваго и третьяго членовъ прогрессіи равна 15, а сумма второго и четвертаго 30. Найти сумму десяти членовъ.

82. Разность между третьимъ и первымъ членами прогрессіи равна 24, а разность между пятымъ и первымъ 624. Найти сумму шести членовъ.

83. Найти четыре числа, составляющія кратную прогрессію, зная, что первое число больше второго на 36, а третье больше четвертаго на 4.

83. Найти четыре числа, составляющія кратную прогрессію, зная, что сумма крайнихъ членовъ равна 27, а сумма среднихъ 18.

84. Найти прогрессію изъ шести членовъ, зная, что сумма трехъ первыхъ членовъ равна 112, а сумма трехъ послѣднихъ 14.

84 Найги прогрессію изъ шести чиселъ, зная, что сумма членовъ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, равна 455, а сумма членовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ, равна 1365.

85. Три числа, составляющія кратную прогрессію, даютъ въ суммѣ 26; если къ этимъ числамъ прибавить соотвѣтственно 1, 6 и 3 то получатся три числа, составляющія разностную прогрессію Найти числа.

85. Три числа, составляющія разностную прогрессію, даютъ въ суммѣ 15; если къ этимъ числамъ прибавить соотвѣтственно 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющія кратную прогрессію Найти эти числа.

86. Если изъ четырехъ неизвѣстныхъ чиселъ, составляющихъ разностную прогрессію, вычесть соотвѣтственно 2, 7, 9 и 5, то получатся числа, составляющія кратную прогрессію. Найти члены разностной прогрессіи.

86. Если изъ четырехъ неизвѣстныхъ чиселъ, составляющихъ кратную прогрессію, вычесть соотвѣтственно 5, 6, 9 и 15, то получатся числа, составляющія разностную прогрессію. Найти члены кратной прогрессіи.

87. Показать, что если a, b, c и d составляютъ кратную прогрессію, то справедливо соотношеніе $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

87. Показать, что если a. b, c и d составляютъ кратную прогрессію, то справедливо соотношеніе $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$.

88. Доказать, что въ прогрессіи, состоящей изъ четнаго числа членовъ, отношеніе суммы членовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ, къ суммѣ членовъ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, равно знаменателю прогрессіи.

88. Доказать, что въ прогрессіи, состоящей изъ нечетнаго числа членовъ, сумма квадратовъ членовъ равна суммѣ членовъ, умноженной на разность между суммой членовъ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, и суммой членовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ.

89. Найти m-й и n-й члены прогрессіи, въ которой $(m+n)$-й членъ равенъ k, а $(m-n)$-й равенъ l.

89. Найти n-й и $(m+p)$-й члены прогрессіи. въ которой m-й членъ равенъ k, а p-й равенъ l.

90. Упростить выраженіе суммы $a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$.

90. Упростить выраженіе суммы $na+(n-1)a^2+(n-2)a^3+\cdots+a^n$.

Кратная прогрессія, въ которой абсолютная величина знаменателя больше единицы, не можетъ быть продолжена безконечно далеко, потому что въ такомъ случаѣ послѣдній членъ ея и сумма членовъ становятся неопредѣленными безконечными величинами.

Если же абсолютная величина знаменателя прогрессіи меньше единицы, то можно разсматривать въ ней безконечную послѣдовательность членовъ, при чемъ предѣлъ послѣдняго члена нужно считать равнымъ нулю, а вслѣдствіе этого изъ формулы $s_n=\frac{a-uq}{1-q}$ при n безконечно большомъ получается формула $s=\frac{a}{1-q}$ для суммы прогрессіи безконечно-убывающей.

Опредѣлить предѣлы суммъ слѣдующихъ безконечно-убывающихъ прогрессій:

91. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 91. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots$

92. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots\cdots$ 92. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

93. $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\cdots\cdots$ 93. $\sqrt{5}+\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}+\cdots\cdots$

94. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\cdots\cdots$ 94. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-1+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\cdots\cdots$

95. Составить такую безконечно-убывающую прогрессію, въ которой каждый членъ въ k разъ больше суммы всѣхъ слѣдующихъ за нимъ членовъ.

95. Составить такую безконечно-убывающую прогрессію, въ которой каждый членъ въ k разъ меньше суммы всѣхъ слѣдующихъ за нимъ членовъ.

96. Опредѣлить сумму $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_k}$, гдѣ $s_1, s_2, \ldots, s_k$ обозначаютъ суммы безконечно-убывающихъ прогрессій, которыхъ первые члены равны 1, а знаменатели суть соотвѣтственно r, r^2,...., r^k, при чемъ $r<1$.

96. Опредѣлить сумму $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_k}$, гдѣ s_1, s_2,...., s_k обозначаютъ суммы безконечно-убывающихъ прогрессій, которыхъ первые члены равны 1, а знаменатели суть соотвѣтственно r^{-1}, r^{-2},...., r^{-k}, при чемъ $r>1$.

97. Линія AB дѣлится въ точкѣ C пополамъ, далѣе AC дѣлится въ D пополамъ, затѣмъ CD въ E пополамъ, DE въ F пополамъ, EF въ G пополамъ и т. д. до безконечности. Опредѣлить предѣльное разстояніе точки дѣленія отъ A.

97. Линія AB дѣлится въ точкѣ C пополамъ, далѣе BC дѣлится въ D пополамъ, затѣмъ CD въ E пополамъ, DE въ F пополамъ, EF въ G пополамъ и т. д. до безконечности. Опредѣлить предѣльное разстояніе точки дѣленія отъ A.

98. Въ квадратъ, сторона котораго a, вписанъ черезъ дѣленіе сторонъ пополамъ другой квадратъ, въ этотъ квадратъ вписанъ точно также новый квадратъ и т. д. до безконечности. Опредѣлить предѣлы, къ которымъ стремятся суммы сторонъ и площадей всѣхъ квадратовъ.

98. Въ правильный треугольникъ, сторона котораго a, вписанъ черезъ дѣленіе сторонъ пополамъ другой правильный треугольникъ, въ этотъ треугольникъ вписанъ точно также новый треугольникъ и т. д. до безконечности. Опредѣлить предѣлы, къ которымъ стремятся суммы сторонъ и площадей всѣхъ треугольниковъ.

99. Данъ правильный треугольникъ, котораго сторона a; изъ трехъ высотъ его строится второй правильный треугольникъ; изъ трехъ высотъ второго новый треугольникъ и т. д.. Опредѣлить предѣлы тѣхъ алгебраическихъ суммъ, изъ которыхъ въ одной периметры, а въ другой площади треугольниковъ поочередно являются слагаемыми и вычитаемыми.

99. Данъ квадратъ, котораго діагональ a; сторона этого квадрата принимается за діагональ второго квадрата; сторона второго за діагональ новаго квадрата и т. д.. Опредѣлить предѣлы тѣхъ алгебраическихъ суммъ, изъ которыхъ въ одной периметры, а въ другой площади квадратовъ поочередно являются слагаемыми и вычитаемыми.

100. Въ кругъ вписанъ квадратъ, въ квадратъ вписанъ второй кругъ, во второй кругъ второй квадратъ и т. д.. Опредѣлить предѣльныя значенія суммъ площадей всѣхъ круговъ и всѣхъ квадратовъ.

100. Въ кругъ вписанъ правильный треугольникъ, въ треугольникъ вписанъ второй кругъ, во второй кругъ второй правильный треугольникъ и т. д.. Опредѣлить предѣльныя значенія суммъ площадей всѣхъ круговъ и всѣхъ треугольниковъ.

§ 3. Простѣйшіе ряды, приводящіеся къ прогрессіямъ.

Рядомъ называется послѣдовательность выраженій, въ которой каждое слѣдующее выраженіе составляется изъ предыдущаго по одному и тому же опредѣленному закону. Прогрессіи представляютъ частные примѣры рядовъ. Ряды бываютъ конечные и безконечные.

Выраженія, составляющія рядъ, называются членами его; они обозначаются обыкновенно черезъ u_1, u_2,...., u_n. Выраженіе u_n представляетъ общій членъ ряда; придавая въ этомъ выраженіи буквѣ n частныя значенія 1, 2, 3,,,.., будемъ получать всѣ члены ряда, начиная съ перваго.—Сумма n членовъ ряда обозначается черезъ s_n. Опредѣленіе суммы называется суммированіемъ ряда. Суммированіе рядовъ не имѣетъ общихъ правилъ и возможно лишь въ исключительныхъ случаяхъ.

Въ нижеслѣдующихъ простѣйшихъ примѣрахъ суммы рядовъ опредѣляются посредствомъ разложенія этихъ рядовъ на разностныя или кратныя прогрессіи.

Если указанное разложеніе не замѣчается непосредственно при разсматриваніи всего ряда, то нужно отдѣльно разсматривать его общій членъ и по разложенію послѣдняго судить о разложеніи всего ряда.

Опредѣлить въ случаяхъ четнаго и нечетнаго n суммы n членовъ слѣдующихъ рядовъ, приводящихся къ разностнымъ прогрессіямъ:

101. $1-3+5-7+\cdots$

102. $1-2+3-4+\cdots$

101. $2-4+6-8+\cdots$

102. $1+2-3-4+\cdots$

Опредѣлить суммы n членовъ слѣдующихъ рядовъ, приводящихся къ кратнымъ прогрессіямъ:

103. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\cdots+\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$

103. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{9}{8}+\cdots\pm\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$

104. $3+2.3^2+3.3^3+4.3^4+\cdots+n.3^n$

104. $5+2.5^2+3.5^3+4.5^4+\cdots+n.5^n$

105. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\dots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$ 105. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\dots\pm\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

106. $5+55+555+\dots+\frac{5(10^n-1)}{9}$ 106. $7+77+777+\dots+\frac{7(10^n-1)}{9}$

107. Основываясь на тождествѣ $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ и подставляя въ это тождество, вмѣсто n, рядъ чиселъ 1, 2, 3,...., n, опредѣлить сумму квадратовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ.

107. Основываясь на тождествѣ $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$ и подставляя въ это тождество. вмѣсто n, рядъ чиселъ 1, 2, 3 .... n, опредѣлить сумму кубовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ.

108. Найти сумму n членовъ ряда, котораго общій членъ $3n^2+2n$.

108. Найти сумму n членовъ ряда, котораго общій членъ $4n^3 \ 3n$.

109. Вообразивъ пирамидальную кучу шаровъ, въ которой основаніе и каждый изъ остальныхъ слоевъ имѣетъ форму равносторонняго треугольника, замѣчаемъ, что числа шаровъ, лежащихъ въ слояхъ, начиная съ верхняго, выражаются послѣдовательными суммами 1, $1+2$, $1+2+3$,...., $1+2+3+\dots+n$. Основываясь на томъ, что общій членъ этого ряда суммъ можетъ быть представленъ въ видѣ $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$, опредѣлить полное число шаровъ въ кучѣ.

109. Вообразивъ пирамидальную кучу шаровъ, въ которой основаніе и каждый изъ остальныхъ слоевъ имѣетъ форму прямоугольника, замѣчаемъ, что числа шаровъ, лежащихъ въ слояхъ, начиная съ верхняго, въ которомъ, положимъ, одинъ рядъ въ a шаровъ, выражаются послѣдовательно черезъ a, $2(a+1)$, $3(a+2)$,......, $n(a+n-1)$. Основываясь на томъ, что общій видъ этихъ выраженій можетъ быть написанъ въ формѣ $n^2+(a-1)n$, опредѣлить полное число шаровъ въ кучѣ.

110. Найти сумму n членовъ ряда $1.2+2.3+3.4+4.5+\dots$

110. Найти сумму n членовъ ряда $1.2(a+1)+2.3(a+2)+$ $+3.4(a+3)+4.5(a+4)+\dots$

ОТДѢЛЕНІЕ XIII.

ЛОГАРИѲМЫ И ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ.

---

§ 1. Общія свойства логариѳмовъ.

Два равенства $y=a^x$, и $x=Lg_a y$ выражаютъ одну и ту же зависимость чиселъ. Отысканіе y по первому изъ нихъ составляетъ дѣйствіе возведеніе въ степень или потенцированіе, отысканіе x по второму составляетъ вычисленіе показателя или логариѳмированіе. Когда разсматривается послѣднее дѣйствіе, то y называется числомъ, a основаніемъ системы логариѳмовъ и x логариѳмомъ числа y при основаніи a.

Логариѳмомъ называется показатель степени, въ которую нужно возвести основаніе для составленія числа.

1. Какое число имѣетъ логариѳмъ 3 при основаніи 2?

1. Какое число имѣетъ логариѳмъ 2 при основаніи 3.

2. Какое число имѣетъ логариѳмъ $\frac{1}{2}$ при основаніи 9?

2. Какое число имѣетъ логариѳмъ $\frac{1}{3}$ при основаніи 8?

3. При какомъ основаніи число 32 имѣетъ логариѳмъ 5?

3. При какомъ основаніи число 81 имѣетъ логариѳмъ 4?

4. При какомъ основаніи число 4 имѣетъ логариѳмъ $\frac{1}{3}$?

4. При какомъ основаніи число 9 имѣетъ логариѳмъ $\frac{1}{2}$?

5. Чему равенъ логариѳмъ числа 16, когда основаніе равно 2?

5. Чему равенъ логариѳмъ числа 27, когда основаніе равно 3?

6. Чему равенъ логариѳмъ числа 3, когда основаніе равно 81?

6. Чему равенъ логариѳмъ числа 7, когда основаніе равно 49?

7. При какомъ основаніи $Lg16$ равенъ 2?

7. При какомъ основаніи $Lg81$ равенъ 2?

8. Найти x, зная, что $Lg_4x=3$.

8. Найти x, зная, что $Lg_5x=3$.

9. Какое число имѣетъ при основаніи 5 логариѳмъ -2?

9. Какое число имѣетъ при основаніи 3 логариѳмъ -3?

10. Найти логариѳмъ $\frac{1}{8}$ при основаніи 2.

10. Найти логариѳмъ $\frac{1}{81}$ при основаніи 3.

11. Найти логариѳмы числа 1024, принимая за основанія числа 2, 4 и 32.

11. Найти логариѳмы числа 729, принимая за основанія числа 3, 9 и 27.

12. Найти логариѳмы числа 81, принимая за основанія числа $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{81}$.

12. Найти логариѳмы числа 256, принимая за основанія числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$.

13. Какое число имѣетъ логариѳмъ -3 при основаніи 8?

13. Какое число имѣетъ логариѳмъ -4 при основаніи 6?

14. При какомъ основаніи логариѳмъ $\frac{1}{243}$ равенъ -5?

14. При какомъ основаніи логариѳмъ $\frac{1}{64}$ равенъ -3?

15. Найти логариѳмы дроби $\frac{1}{64}$, принимая за основанія числа 2, 4 и 8.

15. Найти логариѳмы дроби $\frac{1}{729}$, принимая за основанія числа 3, 9 и 27.

16. Найти логариѳмы дроби $\frac{1}{729}$, принимая за основанія числа $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$.

16. Найти логариѳмы дроби $\frac{1}{512}$, принимая за основанія числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

17. Основаніе равно $\frac{3}{4}$; найти числа, которыхъ логариѳмы суть 0, 1, —1, 2, —2, 3, —3.

17. Основаніе равно $1\frac{1}{2}$; найти числа, которыхъ логариѳмы суть 0, 1, —1, 3, —3, 4, —4.

18. Основаніе равно $2\frac{1}{2}$; найти логариѳмы чиселъ $\frac{2}{5}$, $6\frac{1}{4}$, 1, $\frac{8}{125}$.

18. Основаніе равно $\frac{3}{5}$; найти логариѳмы чиселъ $\frac{5}{3}$, $2\frac{7}{9}$, 1, $\frac{27}{125}$.

19. При какихъ основаніяхъ число 125 имѣетъ логариѳмы 3 1, —3, —1?

19. При какихъ основаніяхъ число 343 имѣетъ логариѳмы 3 —3, 1, —1?

20. Если основаніе логариѳмовъ равно 0,5, то чему равны логариѳмы чиселъ 1, 4, 2, $\frac{1}{4}$, 8, $\frac{1}{8}$?

20. Если основаніе логариѳмовъ равно 0,2, то чему равны логариѳмы чиселъ 1, 25, 5, 0,04, 125, 0,008?

21. Какое число имѣетъ логариѳмъ $\frac{3}{4}$ при основаніи 3?

21. Какое число имѣетъ логариѳмъ $\frac{2}{3}$ при основаніи 2?

22. Найти логариѳмъ числа 2 при основаніи 5.

22. Найти логариѳмъ числа 5 при основаніи 3.

23. При какомъ основаніи число 5 имѣетъ логариѳмомъ 2?

23. При какомъ основаніи число 3 имѣетъ логариѳмомъ 2?

24. Найти логариѳмъ числа 200 при основаніи 10.

24. Найти логариѳмъ числа 60 при основаніи 5.

25. Найти число, логариѳмъ котораго при основаніи 8 равенъ $-\frac{3}{4}$

25. Найти число, логариѳмъ котораго при основаніи 25 равенъ $-\frac{2}{3}$

26. При какомъ основаніи число 7 имѣетъ логариѳмъ $-1\frac{1}{2}$?

26. При какомъ основаніи число 5 имѣетъ логариѳмъ $-\frac{3}{4}$?

27. Основаніе логариѳмовъ -8; найти числа, логариѳмы которыхъ суть -1, 3, -2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

27. Основаніе логариѳмовъ -81; найти числа, логариѳмы которыхъ суть 2, -1, -2, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$.

28. Найти логариѳмы чиселъ $-\frac{8}{27}$, $\frac{4}{9}$, $5\frac{1}{16}$ при основаніи равномъ $-\frac{2}{3}$.

28. Найти логариѳмы чиселъ $-\frac{1}{4}$, -2, -32, 64 при основаніи равномъ $-\frac{1}{8}$.

29. Чему равенъ логариѳмъ $\sqrt[5]{9}$ при основаніи 3, 81, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$?

29. Чему равенъ логариѳмъ $\sqrt[3]{49}$ при основаніи 7, $\frac{1}{7}$, 49, $\frac{1}{343}$?

30. При какомъ основаніи $\sqrt{8}$ имѣетъ логариѳмы $\frac{3}{4}$, -3, -1, $\frac{2}{3}$?

30. При какомъ основаніи $\sqrt[3]{25}$ имѣетъ логариѳмы $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, -1, -2?

Рѣшить слѣдующія показательныя уравненія, въ которыхъ неизвѣстныя обозначены послѣдними буквами алфавита:

31. $10^{-x}=10000$	31. $100^{-x}=10000$
32. $\sqrt[3]{a^x}=\sqrt{a^{3x+2}}$	32. $\sqrt[4]{a^{x+1}}=\sqrt[3]{a^{x-2}}$
33. $16^x=\frac{1}{4}$	33. $27^x=\frac{1}{9}$
34. $\sqrt[1-x]{a^3}=\sqrt[3-x]{a^2}$	34. $\sqrt[2x+1]{a^5}=\sqrt[2x-1]{a^3}$
35. $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$	35. $\left(\frac{8}{27}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^4$
36. $\sqrt{a^{x-1}}\,\sqrt[3]{a^{2x-1}}\,\sqrt[4]{a^{2-3x}}=1$	36. $\sqrt[3]{a^{2-z}}\,\sqrt[4]{a^{4-z}}\,\sqrt[6]{a^{5z-1}}=1$
37. $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x=128$	37. $\left(\frac{1}{0{,}75}\right)^x=\frac{27}{64}$
38. $a^{(1-x)(x-2)}=\frac{1}{a^6}$	38. $a^{(2-x)(x+1)}=\frac{1}{a^4}$
39. $\sqrt[x]{256}=4^x$	39. $\sqrt[x]{19683}=3^x$
40. $2^x-2^{x-2}=3$	40. $3^{x+1}-3^x=2$
41. $2^{2x}.3^x=144$	41. $2^x.3^{2x}=324$
42. $5^{x+1}+5^x=750$	42. $8.3^x+3^{x+1}=891$

43. $6^{2x+4}=3^{3x}.2^{x+8}$

43. $10^{3x+2}=5^{4x+1}.2^{2x+3}$

44. $6^{x}+6^{x+1}=2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}$

44. $2^{x}+2^{x-1}-2^{x-3}=4^{x+2}-4^{x+1}-4^{x}$

45. $10^{(3-x)(4-x)}=100$

45. $10^{(x+2)(x-3)}=1000000$

46. $\sqrt[a-u]{c^{b+u}}=\sqrt[a+u]{c^{b-u}}\sqrt[a^2-u^2]{c^2}$

46. $\sqrt[a-u]{c^{u-b}}\sqrt[a+u]{c^{u+b}}=\sqrt[a^2-u^2]{c^{2(ab+1)}}$

47. $5^{1-x}=7^{x-1}$

47. $3^{x-1}=11^{1-x}$

48. $4^{\sqrt{x+1}}=64.2^{\sqrt{x+1}}$

48. $9^{\sqrt{x-1}}=81.3^{\sqrt{x-1}}$

49. $5^{(x^2+x-2)(3-x)}=1$

49. $4^{(x^2-2x-3)(x-2)}=1$

50. $a^{2u}+c^2=2ba^u$

50. $b^{2u}+a^2=2cb^u$

Если нѣкоторое число составляется по даннымъ числамъ посредствомъ дѣйствій умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня, то логариѳмъ этого числа составляется по логариѳмамъ данныхъ чиселъ посредствомъ дѣйствій низшаго порядка: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Составленіе логариѳма по данному выраженію числа называется логариѳмированіемъ. Дѣйствіе логариѳмированія производится на основаніи слѣдующихъ теоремъ:

Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ производителей.

Логариѳмъ частнаго равенъ разности между логариѳмами дѣлимаго и дѣлителя.

Логариѳмъ степени равенъ логариѳму числа, возводимаго въ степень, умноженному на показателя степени.

Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкоренного числа, дѣленному на показателя корня.

51. Выразить $Lg6$ черезъ $Lg2$ и $Lg3$.

51. Выразить $Lg21$ черезъ $Lg3$ и $Lg7$.

52. Выразить $Lg1\frac{2}{3}$ черезъ $Lg5$ и $Lg3$.

52. Выразить $Lg2\frac{3}{5}$ черезъ $Lg13$ и $Lg5$.

53. Выразить $Lg125$ черезъ $Lg5$.

53. Выразить $Lg81$ черезъ $Lg3$.

54. Выразить $Lg\sqrt[4]{11}$ черезъ $Lg11$.

54. Выразить $Lg\sqrt[5]{2}$ черезъ $Lg2$.

55. Если основаніе логариѳмовъ равно 3, то $Lg81=4$ и $Lg243=5$. Чему равны $Lg(81.243)$ и $Lg\frac{81}{243}$ при томъ же основаніи?

55. Если основаніе логариѳмовъ равно 2, то $Lg64=6$ и $Lg1024=10$. Чему равны $Lg(1024.64)$ и $Lg\frac{64}{1024}$ при томъ же основаніи?

56. Какихъ простыхъ чиселъ нужно знать логариѳмы, чтобы найти логариѳмы при томъ же основаніи чиселъ 24, $\frac{125}{27}$, $\sqrt{38}$, $\sqrt[3]{\frac{7}{25}}$?

56. Какихъ простыхъ чиселъ нужно знать логариѳмы, чтобы найти логариѳмы при томъ же основаніи чиселъ 18, $\frac{8}{25}$, $\sqrt[3]{50}$, $\sqrt[4]{\frac{9}{17}}$?

Въ нижеслѣдующихъ задачахъ посредствомъ буквъ lg обозначены такъ называемые десятичные логариѳмы, т.-е. логариѳмы при основаніи 10.

57. Зная, что $lg2=0{,}30103$, $lg3=0{,}47712$ и $lg5=0{,}69897$, найти $lg6$, $lg15$, $lg30$, $lg10$, $lg1000$.

57. Зная, что $lg2=0.30103$, $lg5=0{,}69897$ и $lg7=0{,}84510$, найти $lg14$, $lg35$, $lg50$, $lg100$, $lg10000$.

58. При данныхъ предыдущей задачи найти $lg2\frac{1}{2}$, $lg1\frac{2}{3}$, $lg\frac{2}{25}$, $lg0{,}6$, $lg0{,}016$.

58. При данныхъ предыдущей задачи найти $lg2\frac{4}{5}$, $lg\frac{2}{7}$, $lg\frac{5}{14}$, $lg0{,}07$, $lg0{,}0014$.

59. Найти $lg2$, $lg20$, $lg200$, а также $lg15$, $lg150$, $lg1500$.

59. Найти $lg7$, $lg70$, $lg700$, а также $lg35$, $lg350$, $lg3500$.

60. Найти $lg0{,}3$, $lg0{,}003$, $lg0{,}06$, $lg0{,}0006$.

60. Найти $lg0{,}2$, $lg0{,}002$, $lg0{,}14$, $lg0{,}0014$.

Произвести логариѳмированіе слѣдующихъ выраженій:

61. $2ab$ 61. $3bc$ **62**. $\frac{ab}{c}$ 62. $\frac{a}{bc}$

63. a^3b^2 63. a^2bc^3 **64**. $\frac{a^2}{b^3c^7}$ 64. $\frac{a^5b^6}{c^4}$

65. $2(a+b)$ 65. $5(a-b)$ **66**. $\frac{3}{a^2-b^2}$ 66. $\frac{a^2-b^2}{7}$

67. $\frac{(a-b)^2c}{(a+b)d}$ 67. $\frac{a(b+c)}{(b-c)^2d}$ **68**. $5a^2b\sqrt[3]{c}$ 68. $2b\sqrt{ac}$

69. $\sqrt[5]{\frac{3a^3b}{c^4}}$ 69. $\sqrt[4]{\frac{a^3}{2b^2c}}$ **70**. $5a\sqrt[3]{a^2(a-b)}$ 70. $8a^3\sqrt[5]{a(b+c)^2}$

71. $\frac{2ab^3}{c\sqrt{d}}$ 71. $\frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c\sqrt{d}}$ **72**. $\frac{1}{a^n\sqrt{b}}$ 72. $\frac{1}{a\sqrt[n]{b}}$

73. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{5}}$ 73. $a^{-2}b^{\frac{4}{3}}$ **74.** $\sqrt{2\sqrt{6\sqrt{15}}}$ 74. $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{21\sqrt[3]{6}}}$

75. $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{\sqrt[5]{c^3}}}$ 75. $\sqrt[5]{\frac{a^3\sqrt[3]{b}}{b^2}}$ **76.** $\frac{a^{-\frac{3}{4}}b^2}{c^{-\frac{1}{5}}}$ 76. $\frac{a^{\frac{2}{5}}b^{-3}}{c^{-\frac{3}{4}}}$

77. $\sqrt{\frac{24\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}}$ 77. $\sqrt{\frac{15\sqrt{3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{25\sqrt{3}}}}$

78. $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\sqrt[2]{\frac{a}{b}}}$ 78. $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{ab}}{b}\sqrt[2]{\frac{b}{a^3}}}$

79. $Lg(\sqrt[5]{a^4})^{\sqrt[3]{a^2}}$ 79. $Lg(\sqrt[3]{a^5})^{\sqrt[7]{a^4}}$

80. $Lg\frac{\sqrt{(a+b)^{2Lg(a-b)}}}{\sqrt{(a-b)^{Lg(a+b)}}}$ 80. $Lg\frac{\sqrt[3]{(a^2+b^2)^{5Lg(a-b)}}}{\sqrt[3]{(a-b)^{Lg(a^2+b^2)}}}$

Если логариѳмъ нѣкотораго числа выраженъ черезъ логариѳмы данныхъ чиселъ посредствомъ обозначенія дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, то можно найти выраженія искомаго числа черезъ данныя числа посредствомъ обозначенія соотвѣтствующихъ дѣйствій высшаго порядка.

Составленіе числа по данному выраженію логариѳма называется потенцированіемъ. Дѣйствіе потенцированія производится на основаніи вышеуказанныхъ четырехъ теоремъ, выраженныхъ только въ обратной формѣ.

Сумма логариѳмовъ нѣсколькихъ чиселъ равна логариѳму произведенія этихъ чиселъ.

Разность логариѳмовъ двухъ чиселъ равна логариѳму частнаго отъ дѣленія перваго числа на второе.

Произведеніе логариѳма на число равно логариѳму степени, которой показатель равенъ множителю.

Частное отъ дѣленія логариѳма на число равно логариѳму корня, котораго показатель равенъ дѣлителю.

Рѣшить посредствомъ потенцированія слѣдующія уравненія:

81. $Lgx=Lg7-Lg3+Lg2$ 81. $Lgx=Lg3+Lg5-Lg2$

82. $Lgx=3Lg5+2Lg3$ 82. $Lgx-2Lg3+5Lg2$

83. $Lgx=\frac{3}{5}Lg11-\frac{2}{7}Lg5$ 83. $Lgx=\frac{1}{3}Lg17-\frac{5}{9}Lg3$

84. $Lgx=2Lg13-\frac{2}{5}Lg2-\frac{4}{3}Lg7$ 84. $Lgx=3Lg5-\frac{7}{3}Lg19-\frac{2}{3}Lg2$

Найти выраженія по даннымъ формамъ ихъ логариѳмовъ:

85. $3Lga+2Lgb-4Lgc$ 85. $Lga-3Lgb+5Lgc$

86. $\frac{2}{5}Lg(a+b)-\frac{3}{4}Lg(a-b)$ 86. $\frac{3}{2}Lg(a-b)-\frac{5}{3}Lg(a+b)$

87. $Lg(a+x)-\frac{2}{3}(2Lga+\frac{3}{4}Lgb)$ 87. $2Lg(a-x)+\frac{3}{4}(Lga-\frac{2}{3}Lgb)$

88. $\frac{1}{p}[(n-1)Lga-\frac{2}{p}Lgb]+\frac{n}{2}Lgc$ 88. $\frac{2}{n}[(p+1)Lga+\frac{1}{n}Lgb]-\frac{2}{p}Lgc$

89. $-3Lga+\frac{1}{3}[Lg(a+b)+\frac{2}{5}Lg(a-b)-Lgb-\frac{1}{2}Lgc]$

89. $-\frac{2}{3}Lgb+\frac{3}{4}[Lga-2Lgc-Lg(a-b)+\frac{3}{5}Lg(a+b)]$

90. $\frac{m}{n}\left\{-\frac{3}{2}Lga+2Lgz+\frac{2}{5}[Lg(a-2z)-3(Lga-Lgb)]\right\}$

90. $\frac{n}{m}\left\{-3Lgz+\frac{2}{5}Lga-\frac{3}{4}[5(Lga+\frac{1}{2}Lgb)-Lg(a+2z)]\right\}$

Рѣшить при помощи логариѳмированія слѣдующія уравненія:

91. $x^x=x$ 91. $x^x=\frac{1}{x}$ **92.** $x^{lgx}=10$ 92. $x^{lgx}=10000$

93. $x^{lgx}=100x$ 93. $x^{lgx-2}=1000$ **94.** $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$ 94. $x^{\sqrt[3]{x}}=(\sqrt[3]{x})^x$

95. $\sqrt[3]{x^{lgx-1}}=100$ 95. $\sqrt{x^{lg\sqrt{x}}}=10$

96. $10^x=\sqrt[x]{5}$ 96. $10^x=\sqrt[x]{3}$

Рѣшить при помощи потенцированія слѣдующія уравненія:

97. $lgx=1-lg3$ 97. $lgx=2-lg7$

98. $Lg_aLg_ax=Lg_am+Lg_an$ 98. $Lg_aLg_ax=Lg_am-Lg_an$

99. $92^{lgx}=778688$ 99. $248^{lgx}=61504$

100. $Lg_aLg_ax=Lg_aLg_am-Lg_an$ 100. $Lg_aLg_ax=Lg_am-Lg_aLg_an$.

§ 2. Десятичные логариѳмы.

Десятичный логариѳмъ числа 1 есть 0. Десятичные логариѳмы положительныхъ степеней 10-ти, т.-е. чиселъ 10, 100, 1000,.... суть положительныя числа 1, 2, 3,...., такъ что вообще логариѳмъ числа обозначеннаго единицей съ нулями, равенъ числу нулей. Десятичные логариѳмы отрицательныхъ степеней 10 ти, т.-е. дробей 0,1 0,01, 0,001... суть отрицательныя числа —1, —2, —3. ..., такъ что вообще логариѳмъ десятичной дроби съ числителемъ единицей равенъ отрицательному числу нулей знаменателя.

Логариѳмы всѣхъ остальныхъ соизмѣримыхъ чиселъ несоизмѣримы. Такіе логариѳмы вычисляются приближенно, обыкновенно съ точностью до одной стотысячной, и потому выражаются пятизначными десятичными дробями; напр., $lg3=0{,}47712$.

При изложеніи теоріи десятичныхъ логариѳмовъ всѣ числа предполагаются составленными по десятичной системѣ ихъ единицъ и долей, а всѣ логариѳмы выражаются чрезъ десятичную дробь, содержащую 0 цѣлыхъ, съ цѣлымъ прибавкомъ или убавкомъ. Дробная часть логариѳма называется его мантиссой, а цѣлый прибавокъ или убавокъ—его характеристикой. Логариѳмы чиселъ, большихъ единицы, всегда положительны и потому имѣютъ и положительную характеристику; логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, всегда отрицательны, но ихъ представляютъ такъ, что мантисса ихъ оказывается положительной, а одна характеристика отрицательна. Напр., $lg500=0{,}69897+2$ или короче $2{,}69897$, а $lg0{,}05=$ $=0{,}69897-2$, что для краткости обозначаютъ въ видѣ $\bar{2}{,}69897$, ставя характеристику на мѣсто цѣлыхъ чиселъ, но со знакомъ — надъ ней. Такимъ образомъ логариѳмъ числа, большаго единицы, представляетъ ариѳметическую сумму положительнаго цѣлаго и положительной дроби, а логариѳмъ числа, меньшаго единицы, алгебраическую сумму отрицательнаго цѣлаго съ положительной дробью.

Всякій отрицательный логариѳмъ можно привести къ указанной искусственной формѣ. Напр., имѣемъ $lg\frac{3}{5}=lg3-lg5=0{,}47712-$ $-0{,}69897=-0{,}22185$. Чтобы преобразовать этотъ истинный логариѳмъ въ искусственную форму, прибавимъ къ нему 1 и послѣ алгебраическаго сложенія укажемъ для поправки вычитаніе единицы. Получимъ $lg\frac{3}{5}=lg0{,}6=(1-0{,}22185)-1=0{,}77815-1$. При этомъ окажется, что мантисса 0,77815 есть та самая, которая соотвѣтствуетъ числителю 6 даннаго числа, представленнаго по десятичной системѣ въ формѣ дроби 0,6.

При указанномъ представленіи десятичныхъ логариѳмовъ ихъ мантиссы и характеристики обладаютъ важными свойствами въ связи съ обозначеніемъ по десятичной системѣ соотвѣтствующихъ имъ чиселъ. Для разъясненія этихъ свойствъ замѣтимъ слѣдующее. Примемъ за основной видъ числа нѣкоторое произвольное число содержащееся между 1 и 10, и, выражая его по десятичной системѣ, представимъ въ видѣ $a{,}bcdef....$, гдѣ a есть одна изъ значащихъ цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а десятичные знаки b, c, d, e, f.. суть какія угодно цифры, между которыми могутъ быть и нули Вслѣдствіе того, что взятое число содержится между 1 и 10, логариѳмъ его содержится между 0 и 1 и потому этотъ логариѳмъ состоитъ

изъ одной мантиссы безъ характеристики или съ характеристикой 0 Обозначимъ этотъ логариѳмъ въ формѣ $0,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon....$, гдѣ α, β, γ, δ, ε суть нѣкоторыя цифры. Помножимъ теперь данное число съ одной стороны на числа 10, 100, 1000,... и съ другой стороны на числа 0,1, 0,01, 0,001,... и примѣнимъ теоремы о логариѳмахъ произведенія и частнаго. Тогда получимъ рядъ чиселъ большихъ единицъ и рядъ чиселъ меньшихъ единицы съ ихъ логариѳмами:

$$lg a,bcdef....=0,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon....$$

$$lg ab,cdef....=1,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.... \quad lg 0,abcde....=\bar{1},\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon....$$

$$lg abc,def....=2,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.... \quad lg 0,0abcd....=\bar{2},\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon....$$

$$lg abcd,ef....=3,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.... \quad lg 0,00abc....=\bar{3},\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon....$$

При разсматриваніи этихъ равенствъ обнаруживаются слѣдующія свойства мантиссы и характеристики:

Свойство мантиссы. Мантисса зависитъ отъ расположенія и вида значащихъ цифръ числа, но совсѣмъ не зависитъ отъ мѣста занятой въ обозначеніи этого числа. Мантиссы логариѳмовъ чиселъ, имѣющихъ десятичное отношеніе, т.-е. такихъ, которыхъ кратное отношеніе равно какой бы то ни было положительной или отрицательной степени десяти, одинаковы.

Свойство характеристики. Характеристика зависитъ отъ разряда наивысшихъ единицъ или десятичныхъ долей числа, но совсѣмъ не зависитъ отъ вида цифръ въ обозначеніи этого числа.

Если назовемъ числа *a,bcdef....*, *ab.cdef....abc,def....* числами положительныхъ разрядовъ — перваго, второго, третьяго и т. д., разрядъ числа 0,*abcde*..., будемъ считать нулевымъ, а разряды чиселъ 0,0*abcd*...., 0,00*abc*...., 0.000*ab*... выразимъ отрицательными числами минусъ одинъ, минусъ два, минусъ три и т. д., то можно будетъ сказать вообще, что характеристика логариѳма всякаго десятичнаго числа на единицу меньше числа, указывающаго разрядъ.

101. Зная, что $lg2=0,30103$, найти логариѳмы чиселъ 20, 2000, 0,2 и 0,00002.

101. Зная, что $lg3=0,47712$, найти логариѳмы чиселъ 300, 3000, 0,03 и 0,0003.

102. Зная, что $lg5=0,69897$, найти логариѳмы чиселъ 2,5, 500, 0,25 и 0.005.

102. Зная, что $lg7=0,84510$, найти логариѳмы чиселъ 0,7, 4,9 0.049 и 0,0007.

103. Зная $lg3=0,47712$ и $lg7=0,84510$, найти логариѳмы чиселъ 210, 0,021, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{9}$ и $\frac{3}{49}$.

103. Зная $lg2=0,30103$ и $lg7=0,84510$, найти логариөмы чиселъ 140, 0,14, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{8}$ и $\frac{2}{49}$.

104. Зная $lg3=0,47712$ и $lg5=0,69897$, найти логариөмы чиселъ 1,5, $\frac{3}{5}$, 0,12, $\frac{5}{9}$ и 0,36.

104. Зная $lg5=0,69897$ и $lg7=0,84510$, найти логариөмы чиселъ 3,5, $\frac{5}{7}$, 0,28, $\frac{5}{49}$ и 1,96.

Десятичные логариөмы чиселъ, выраженныхъ не болѣе, какъ четырьмя цифрами, подыскиваются прямо по таблицамъ, при чемъ изъ таблицъ находится мантисса искомаго логариөма, а характеристика ставится, сообразуясь съ разрядомъ даннаго числа.

Если же число содержитъ болѣе четырехъ цифръ, то подыскиваніе логариөма сопровождается дополнительнымъ вычисленіемъ. Правило такое: чтобы найти логариөмъ числа, содержащаго болѣе четырехъ цифръ, нужно подыскать въ таблицахъ число, обозначенное четырьмя первыми цифрами, и выписать соотвѣтствующую этимъ четыремъ цифрамъ мантиссу; затѣмъ умножить табличную разность мантиссъ на число, составленное изъ отброшенныхъ цифръ, въ произведеніи откинуть справа столько цифръ, сколько ихъ было откинуто въ данномъ числѣ, и результатъ придать къ послѣднимъ цифрамъ подысканной мантиссы; характеристику же поставить, сообразуясь съ разрядомъ даннаго числа.

Когда ищется число по данному логариөму и логариөмъ этотъ содержится въ таблицахъ, то цифры искомаго числа находятся прямо изъ таблицъ, а разрядъ числа опредѣляется сообразно съ характеристикой даннаго логариөма.

Если же данный логариөмъ не содержится въ таблицахъ, то подыскиваніе числа сопровождается дополнительнымъ вычисленіемъ. Правило такое: чтобы найти число, соотвѣтствующее данному логариөму, мантисса котораго не содержится въ таблицахъ, нужно подыскать ближайшую меньшую мантиссу и выписать соотвѣтствующія ей цифры числа; потомъ умножить разность между данной мантиссой и подъисканной на 10 и раздѣлить произведеніе на табличную разность; полученную цифру частнаго приписать справа къ выписаннымъ цифрамъ числа, отчего и получится искомая совокупность цифръ; разрядъ же числа нужно опредѣлить сообразно характеристикѣ даннаго логариөма.

105. Найти логариѳмы чиселъ 8, 141, 954, 420, 640, 1235, 3907, 3010, 18,43, 2.05, 900,1, 0,73, 0,0028, 0,1008, 0 00005.

105. Найти логариѳмы чиселъ 15, 154, 837, 510, 5002, 1309, 8900, 8,315, 790,7, 0,09, 0,6745, 0,000745, 0,04257, 0,00071.

106. Найти логариѳмы чиселъ 2174,6, 1445,7, 2169,5, 8437,2, 46.472, 6,2853, 0,78938, 0.054294, 631,074, 2,79556, 0,747428, 0,00237158.

106. Найти логариѳмы чиселъ 2578,4, 1323,6, 8170,5, 6245.3, 437,65, 87.268, 0,059372, 0 84938, 62,5475, 131,037, 0,593946, 0,00234261.

107. Найти числа, соотвѣтствующія логариѳмамъ 3.16227, 3,59207, 2,93318, 0,41078. 1.60065, $\bar{2}$,75686, $\bar{3}$,23528, $\bar{1}$,79692, $\bar{4}$.87806, $\bar{5}$,14613.

107. Найти числа, соотвѣтствующія логариѳмамъ 3,07372, 3,69205, 1,64904, 2,16107, 0,70364, $\bar{1}$,31952, $\bar{4}$,30814, $\bar{3}$,00087, $\bar{2}$,69949, $\bar{6}$,57978.

108. Найти числа, соотвѣтствующія логариѳмамъ 3.57686, 3,16340, 2,40359, 1,09517, 4,49823, $\bar{2}$,83882, $\bar{1}$,50060, $\bar{3}$,30056, $\bar{1}$,17112, $\bar{4}$.25100.

108. Найти числа, соотвѣтствующія логариѳмамъ 3,33720, 3,09875, 0,70093, 4,04640, 2,94004, $\bar{1}$,41509, $\bar{2}$,32649, $\bar{4}$,14631, $\bar{3}$,01290, $\bar{5}$,39003.

Положительные логариѳмы чиселъ, большихъ единицы, суть ариѳметическія суммы ихъ характеристики и мантиссы. Поэтому дѣйствія съ ними производятся по обыкновеннымъ ариѳметическимъ правиламъ.

Отрицательные логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, суть алгебраическія суммы отрицательной характеристики и положительной мантиссы. Поэтому дѣйствія съ ними производятся по алгебраическимъ правиламъ, которыя дополняются особыми указаніями, относящимися къ приведенію отрицательныхъ логариѳмовъ въ ихъ нормальную форму. Нормальная форма отрицательнаго логариѳма та, въ которой характеристика есть отрицательное цѣлое количество, а мантисса положительная правильная дробь.

Для преобразованія истиннаго отрицательнаго логариѳма въ его нормальную искусственную форму, нужно увеличить абсолютную величину его цѣлаго слагаемаго на единицу и сдѣлать результатъ отрицательной характеристикой; затѣмъ дополнить всѣ цифры дробнаго слагаемаго до 9, а послѣднюю изъ нихъ до 10 и сдѣлать результатъ положительной мантиссой. Напр., —2,57928=$\bar{3}$,42072.

Для преобразованія нормальной искусственной формы логариөма въ его истинное отрицательное значеніе, нужно уменьшить на единицу отрицательную характеристику и сдѣлать результатъ цѣлымъ слагаемымъ отрицательной суммы; затѣмъ дополнить всѣ цифры мантиссы до 9, а послѣднюю изъ нихъ до 10 и сдѣлать результатъ дробнымъ слагаемымъ той же отрицательной суммы. Напр., $\bar{4}$,57406= =—3,42594.

109. Преобразовать въ искусственную форму логариөмы—2,69537, —4,21293, —0.54225, —1,68307, —3.53820, —5,89990.

109. Преобразовать въ искусственную форму логариөмы—3,21729, —1,73273, —5,42936, —0,51395, —2,43780, —4,22990.

110. Найти истинныя значенія логариөмовъ 1,33278, $\bar{3}$,52793, 2,95426, $\bar{4}$,23725, 1,39420, 5,67990.

110. Найти истинныя значенія логариөмовъ $\bar{2}$,45438, $\bar{1}$,73977, 3,91243, $\bar{5}$,12912, $\bar{2}$,83770, 4.28990.

Правила алгебраическихъ дѣйствій съ отрицательными логариөмами выражаются такъ:

Чтобы приложить отрицательный логариөмъ въ его искусственной формѣ, нужно приложить мантиссу и вычесть абсолютную величину характеристики. Если отъ сложенія мантиссъ выдѣлится цѣлое положительное число, то нужно отнести его къ характеристикѣ результата, сдѣлавъ въ ней соотвѣтствующую поправку. Напр.,

$$3,89573+\bar{2},78452=1_1,68025=2,68025,$$
$$\bar{1},54978+\bar{2},94963=\bar{3}_1,49941=\bar{2},49941.$$

Чтобы вычесть отрицательный логариөмъ въ его искусственной формѣ, нужно вычесть мантиссу и приложить абсолютную величину характеристики. Если вычитаемая мантисса есть большая, то нужно сдѣлать поправку къ характеристикѣ уменьшаемаго такъ, чтобы отдѣлить къ уменьшаемой мантиссѣ положительную единицу. Напр.,

$$2,53798-\bar{3},84582=1_1,53798-\bar{3},84582=4,69216,$$
$$\bar{2},22689-\bar{1},64853=\bar{3}_1,22689-\bar{1},64853=\bar{2},57836.$$

Чтобы умножить отрицательный логариөмъ на положительное цѣлое число, нужно умножить отдѣльно его характеристику и мантиссу. Если при умноженіи мантиссы выдѣлится цѣлое положительное число, то нужно отнести его къ характеристикѣ результата сдѣлавъ въ ней соотвѣтствующую поправку. Напр.,

$$\bar{2},53729.5=\overline{10}_2,68645=\bar{8},68645.$$

При умноженіи отрицательнаго логариөма на отрицательное количество нужно замѣнять множимое его истиннымъ значеніемъ.

Чтобы раздѣлить отрицательный логариөмъ на положительное цѣлое число, нужно раздѣлить отдѣльно его характеристику и ман-

тиссу. Если характеристика дѣлимаго не дѣлится нацѣло на дѣлителя, то нужно сдѣлать въ ней поправку такъ, чтобы отнести къ мантиссѣ нѣсколько положительныхъ единицъ, а характеристику сдѣлать кратной дѣлителя. Напр.,

$$\bar{3},79432 : 5 = \bar{5}_2,79432 : 5 = \bar{1},55886.$$

При дѣленіи отрицательнаго логариѳма на отрицательное количество, нужно замѣнять дѣлимое его истиннымъ значеніемъ.

Выполнить при помощи логариѳмическихъ таблицъ нижепоказанныя вычисленія и провѣрить въ простѣйшихъ случаяхъ результаты обыкновенными способами дѣйствій:

111. $311.25,6$ 111. $4,51.215$ **112.** $758.0,53$ 112. $0,037.269$

113. $6603:213$ 113. $8132:338$ **114.** $3,264:0,078$ 114. $23,65:0,94$

115. $23,5^2$ 115. $11,8^2$ **116.** $0,028^3$ 116. $0,0067^3$

117. $\sqrt{12,5}$ 117. $\sqrt{23,2}$ **118.** $\sqrt[3]{0,052}$ 118. $\sqrt[3]{0,61}$

119. $\frac{438,6.2,138}{25,58}$ 119. $\frac{47,54.3,642}{145,4}$ **120.** $\frac{0,045.7,513}{2,071.0,864}$ 120. $\frac{14,5.0,0178}{0,83.3,105}$

121. $\sqrt[10]{34,567}$ 121. $\sqrt[7]{71,238^3}$ **122.** $\sqrt[9]{0,06432}$ 122. $\sqrt[8]{0,75^{15}}$

123. $5\sqrt[11]{3,1866}$ 123. $2\sqrt[13]{2,7892}$ **124.** $\frac{109}{716}\sqrt{\frac{76}{93}}$ 124. $\frac{21}{37}\sqrt{\frac{119}{295}}$

125. $1,04^{100}$ 125. $2,08^{50}$ **126.** $\sqrt[100]{100}$ 126. $\sqrt[200]{50}$

127. $\sqrt[7]{0,098756^3}$ 127. $\sqrt[5]{0,98437^2}$ **128.** $\sqrt{\left(\frac{37}{2939}\right)^5}$ 128. $\sqrt[9]{\left(\frac{43}{7243}\right)^4}$

129. $(8,53\sqrt[10]{10})^{\frac{2}{3}}$ 129. $(2,38\sqrt[5]{10})^{\frac{3}{5}}$

130. $\left(\frac{38}{27}\right)^{0,07}\left(\frac{51}{43}\right)^{0,03}$ 130. $\left(\frac{25}{7}\right)^{0,03}\left(\frac{39}{19}\right)^{0,07}$

131. $\sqrt{145,27^2-124,49^2}$ 131. $\sqrt[3]{273,43^2-111,21^2}$

132. $\sqrt{0,006\sqrt{0,17624}}$ 132. $\sqrt{0,89394\sqrt[3]{0,092}}$

133. $\sqrt[6]{8-\sqrt[5]{10}}$ 133. $\sqrt[5]{21-\sqrt[3]{17}}$

134. $\sqrt[5]{0,4293\sqrt{\frac{19}{34}}}$ 134. $\sqrt[8]{\frac{37}{43}\sqrt[5]{0,3798}}$

135. $\sqrt{11,367}-\sqrt[3]{16,729}$ 135. $\sqrt[3]{53,114}-\sqrt{15,277}$

136. $\frac{1}{0,7345^3.0,164^2}$ 136. $\frac{1}{0,2127^2.0,921^3}$

137. $\sqrt[10]{2,1663-\sqrt[11]{4919,6}}$ 137. $\sqrt[7]{1,5947-\sqrt[10]{237,53}}$

138. $\frac{1}{0,239^3+0,083^5}$ 138. $\frac{1}{0,0375^2+0,597^3}$

139. $\sqrt[8]{0,054\sqrt[3]{0,0003617}}$ 139. $\sqrt[5]{0,0007\sqrt{0,09342}}$

140. $\sqrt[16]{\frac{43+5\sqrt[3]{268}}{\sqrt{17}}}$ 140. $\sqrt[11]{\frac{12+7\sqrt[5]{277}}{\sqrt[3]{11}}}$

Рѣшить нижеслѣдующія показательныя уравненія:

141. $5^x=17$ 141. $2^x=11$ **142.** $10^x=200$ 142. $7^x=100$

143. $\left(\frac{2}{3}\right)^x=8$ 143. $\left(\frac{7}{9}\right)^x=5$ **144.** $2^{3^x}=100$ 144. $5^{2^x}-100$

145. $10^x-\sqrt[x]{2}$ 145. $5^x-\sqrt[x]{3}$ **146.** $3.2^x=4\sqrt[x]{9}$ 146. $2.3^x=9\sqrt[x]{}$

147. $5^{2^x}\ \ 0,1$ 147. $3^{2^x}-0,1$

148. $\sqrt[x]{1,3713}\ \ \sqrt[10]{10}$ 148. $\sqrt[x]{1,0471}=\sqrt[100]{100}$

149. $3^x-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$ 149. $5^{2x+1}-7^{x+1}\ \ 5^{2x}+7^x$

150. $7^{x\ 1}+7^{x\ 2}+7^{x\ 3}\ \ 5^{x-1}+5^{x\ 2}+5^{x\ 3}$

150. $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=5^x+5^{x+1}+5^{x+2}$

Произвести помощью таблицъ вычисленія:

151. $\frac{0.0045.7,5132}{2,0719.0,864}$ 151. $\frac{14,51.0,017085}{0,78.3,1057}$

152. $\frac{3,5216^3.0,027^2}{0.21785}$ 152. $\frac{40,12^2.0,0113^3}{0,98763}$

153. $\sqrt[9]{\frac{8}{7}\sqrt[6]{54321}}$ 153. $\sqrt[8]{\frac{7}{5}\sqrt[4]{23468}}$

154. $\frac{0,0875}{9,8304}\sqrt{\frac{78}{0,007615}}$ 154. $\frac{0,0379}{2,4548}\sqrt{\frac{123}{0,009843}}$

155. $\sqrt{\frac{17569}{111,11}}-\sqrt[3]{\frac{67685}{1,2365}}$ 155. $\sqrt[3]{\frac{23769}{246,53}}-\sqrt{\frac{12354}{56,273}}$

156. $\frac{8,36\sqrt{0.0067254}}{0,96578\sqrt[3]{0,000035746}}$ 156. $\frac{2,79\sqrt[3]{0,0029745}}{0,79438\sqrt{0,000054237}}$

157. $\frac{87,285^2.\sqrt[10]{75,846}}{\sqrt[3]{-3,055}}$ 157. $\frac{29,348^2.\sqrt[7]{93,594}}{\sqrt[5]{2,743}}$

158. $\sqrt[5]{\frac{0,03425\sqrt[7]{136}}{0,00034}}$ 158. $\sqrt[4]{\frac{0,26758\sqrt[3]{0,4}}{0,006422}}$

159. $\sqrt[10]{\frac{27+3\sqrt[20]{1,4762}}{\sqrt[5]{11}}}$ 159. $\sqrt[20]{\frac{31+2\sqrt[10]{2,4378}}{\sqrt[3]{17}}}$

160. $\sqrt{0,859^3+5\sqrt[3]{11}}$ 160. $\sqrt[8]{0,237^4+7\sqrt{23}}$

161. $(0,0009)^{0,0009}$ 161. $(0,0007)^{0,0007}$

162. $(0,0376)^{0,0376}$ 162. $(0,0289)^{0,0289}$

163. $\sqrt[13]{2,459^{6,3}+8,74^{2,3}}$

163. $\sqrt[11]{3,851^{9,4}+2,97^{3,7}}$

164. $\sqrt[7,062]{0,4275}$

164. $\sqrt[3,271]{0,2837}$

165. $(0,513)^{\sqrt[5]{0.69837}}$

165. $(0,29342)^{\sqrt[7]{0,4126}}$

166. $\sqrt[7]{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{11}}{3^{0,61}}}$

166. $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{211}}{5^{0,692}}}$

167. $\sqrt[-3,2]{(6,263+\sqrt[3]{-4,94623})^{5}}$

167. $\sqrt[2,3]{(2,798+\sqrt[5]{-31,5946})^{3}}$

168. $\sqrt[9]{(\sqrt[4]{0.723}+\sqrt[1,6]{1,23794})^{2}}$

168. $\sqrt[6]{(\sqrt[5]{0,989}+\sqrt[1,8]{2.54932})^{-5}}$

169. $\dfrac{\sqrt[5]{0,8\sqrt[3]{0,7-(1,2686)^{2}}}}{\sqrt[20]{0,0874968^{3}}}$

169. $\dfrac{\sqrt[3]{0,3\sqrt[5]{0,11-(1,6967)^{4}}}}{\sqrt[10]{0,374932^{3}}}$

170. $\dfrac{\sqrt[-4]{1.2-(1.2368)^{-0.72}}}{(\sqrt[3]{0,423286}-0,87)^{2}}$

170. $\dfrac{\sqrt[5]{2,37-(3,2143)^{0,67}}}{(\sqrt{0,597296}-0,713)^{3}}$

171. Опредѣлить площадь правильнаго треугольника, котораго сторона равна 58,327 метра.

171. Опредѣлить сторону правильнаго треугольника, котораго площадь равна 8567,3 кв. метра.

172. Опредѣлить радіусъ круга, котораго площадь 3,8 кв. фута.

172. Опредѣлить радіусъ шара, котораго поверхность 78.5 кв. фут..

173. Опредѣлить діагональ куба, котораго полная поверхность равна 0,78954 кв. аршина.

173. Опредѣлить площадь діагональнаго сѣченія куба, котораго объемъ равенъ 0,29738 куб. аршина.

174. Опредѣлить боковую поверхность конуса, котораго образующая 0,2138 фута, а высота 0,09425 фута.

174. Опредѣлить объемъ конуса, котораго образующая 0,9134 фута, а радіусъ основанія 0,04278 фута.

175. Вычислить 15-й членъ кратной прогрессіи, которой первый членъ $2\frac{3}{5}$, а знаменатель 1,75.

175. Вычислить первый членъ кратной прогрессіи, которой 11-й членъ равенъ 649,5, а знаменатель 1,58.

176. Опредѣлить число множителей a, a^3 a^5,.... такъ, чтобы ихъ произведеніе равнялось данному числу p. Подыскать такое a, при которомъ произведеніе 10-ти множителей равно 100.

176. Опредѣлить число множителей a^2, a^6, a^{10}..... такъ, чтобы ихъ произведеніе равнялось данному числу p. Подыскать такое a, при которомъ произведеніе 5-ти множителей равно 10.

177. Знаменатель кратной прогрессіи равенъ 1,075, сумма 10-ти членовъ ея 2017,8. Найти первый членъ.

177. Знаменатель кратной прогрессіи 1,029, сумма 20-ти членовъ ея 8743,7. Найти двадцатый членъ.

178. Выразить число членовъ кратной прогрессіи по даннымъ первому члену a, послѣднему u и знаменателю q, а затѣмъ, выбравъ произвольно числовыя значенія a и u, подобрать q такъ, чтобы n было какое-нибудь цѣлое число.

178. Выразить число членовъ кратной прогрессіи по даннымъ первому члену a, послѣднему u и знаменателю q, а затѣмъ, выбравъ произвольно числовыя значенія u и q, подобрать a такъ, чтобы n было какое-нибудь цѣлое число.

179. Опредѣлить число множителей a^b, a^{b^2}, a^{b^3},..., такъ, чтобы ихъ произведеніе было равно p. Каково должно быть p для того, чтобы при $a=0{,}5$ и $b=0{,}9$ число множителей было 10.

179. Опредѣлить число множителей $a^{\sqrt{b}}$, a^b, $a^{b\sqrt{b}}$,.... такъ, чтобы ихъ произведеніе было равно p. Каково должно быть p для того, чтобы при $a=0{,}2$ и $b=2$ число множителей было 10.

180. Выразить число членовъ кратной прогрессіи по даннымъ первому члену a, послѣднему u и произведенію всѣхъ членовъ p, а затѣмъ, выбравъ произвольно числовыя значенія a и p, подобрать u и вслѣдъ за нимъ знаменателя q такъ, чтобы n было какое-нибудь цѣлое число.

180. Выразить число членовъ кратной прогрессіи по даннымъ первому члену a, послѣднему u и произведенію всѣхъ членовъ p, а затѣмъ, выбравъ произвольно числовыя значенія u и p, подобрать a и вслѣдъ за нимъ знаменателя q такъ, чтобы n было какое-нибудь цѣлое число.

Рѣшить нижеслѣдующія уравненія, гдѣ можно—безъ помощи таблицъ, а гдѣ нельзя—съ таблицами:

181. $5^{2x}-5^x=600$ 181. $2^{x+1}+2^{2x}=80$

182. $3^{2x+5}=3^{x+2}+2$ 182. $5^{2x-8}=2.5^{x}\ {}^{2}+3$

183. $\sqrt{0{,}35^x}=0{,}00007882$ 183. $\sqrt[3]{0{,}85^x}=0{,}33843$

184. $\sqrt[x-1]{4096}=2\sqrt[x]{32768}$ 184. $\sqrt[x+2]{117649}-7^x\sqrt[4]{2401}$

185. $5\cdot\sqrt[x+2]{3125^{x+1}}=\sqrt[x+3]{15625^{x+2}}$

186. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt[4]{3})^{3x-4}$

187. $\frac{\lg x}{1-\lg 2}=2$

188. $1-\lg 5=\frac{1}{3}(\lg\frac{1}{2}+\lg x+\frac{1}{3}\lg 5)$

189. $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{0,3}=2,2753$

190. $(2,23-1,2x)^{0,36907}=12,8$

191. $5x+2y=100, \lg x-\lg y=\lg 1,6$

192. $\lg x+\lg y=7,\ \lg x-\lg y=5.$

193. $14^x=63y,\ 17^x=87y$

194. $x^y=y^x,\ x^2=y^3$

195. $x^{x+y}=y^{12},\ y^{x+y}=x^3$

196. $0,4^{x+y}=\left(\frac{2}{5}\right)^3, 1,4^{x-y}=1,6565$

197. $x^{\sqrt{y}}=y,\ y^{\sqrt{y}}=x^4$

198. $x^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=y^4,\ y^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x$

199. $x^y=243,\ \sqrt[y]{1024}=\left(\frac{2}{3}x\right)^2$

200. $3^y\cdot\sqrt[x]{64}=36,\ 5^y\cdot\sqrt[x]{512}=200$

185. $3\cdot\sqrt[x-1]{729^{x-2}}=\sqrt[x]{2187^{x-1}}$

186. $(\sqrt[4]{3})^{3x+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}\sqrt[x]{\frac{4}{3}}$

187. $\frac{\lg x}{2-\lg 5}=\frac{1}{2}$

188. $1-\lg 2=\frac{1}{2}(\lg 3+\lg x+\frac{1}{2}\lg 3)$

189. $\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{-0,7}=4,3076$

190. $(3,14-2,1x)^{-0,79438}=15,6$

191. $3x+2y=39, \lg x-\lg y=\lg 1,5$

192. $\lg x+\lg y=7,\ \lg x-\lg y=3$

193. $23^y=28x,\ 12^y=37x$

194. $x^y=y^x,\ x^3=y^5$

195. $x^{x-y}=y^{24},\ y^{x-y}=x^6$

196. $0,7^{x-y}=\left(\frac{7}{10}\right)^2, 2,3^{x+y}=9,2174$

197. $x^{\sqrt{y}}=y^3,\ y^{\sqrt{y}}=\sqrt[3]{x^{16}}$

198. $x^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=y^6,\ y^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=x^{24}$

199. $x^y=16384,\ \sqrt[y]{2187}=\frac{3}{4}x$

200. $9^y\cdot\sqrt[x]{100}=2,7,\ 25^y\cdot\sqrt[x]{10^4}=\frac{5}{4}$.

§ 3. Счисленіе сложныхъ процентовъ.

Рѣшеніе задачъ на сложные проценты основано главнымъ образомъ на дѣйствіяхъ съ числомъ $q=\frac{100+p}{100}=1+r$, которое показываетъ, во что обратится единица наращаемой величины (напр., рубль капитала) въ теченіе единицы времени (напр., года) при счетѣ p процентовъ на 100. Такъ, чтобы узнать, во что обратится капиталъ a при p сложныхъ процентахъ по истеченіи одного года, двухъ лѣтъ, трехъ и т. д., мы составляемъ выраженія aq, aq^2, aq^3, и т. д. Общая формула есть $A=aq^t$, гдѣ A обозначаетъ капиталъ, составляющійся по истеченіи t лѣтъ.—Если время t помѣщенія капитала выражается дробнымъ числомъ $\tau+\alpha$, гдѣ τ цѣлое число лѣтъ и α

дробь, представляющая нѣкоторую часть года, то во время α одинъ рубль обратится въ $1+\alpha r$, и потому вмѣсто предыдущей формулы получимъ другую $A=aq^{\tau}(1+\alpha r)$, еще болѣе общую.—Прибыль p обыкновенно считается на 100, но ее можно было бы считать на какую-нибудь иную сумму, напр., n, и тогда основная формула еще болѣе обобщилась бы тѣмъ, что приняли бы $r=\frac{p}{n}$ и потому $q=\frac{n+p}{n}$.

201. Въ какую сумму обратится капиталъ въ 246 р., положенный въ банкъ на 8 лѣтъ по 5%?

201. Въ какую сумму обратится капиталъ въ 3768 р., положенный въ банкъ на 20 лѣтъ по 4%?

202. Сколько нужно внести въ банкъ, платящій 6% въ годъ, чтобы черезъ 20 лѣтъ имѣть 8000 р.?

202. Сколько нужно внести въ банкъ, платящій 3% въ годъ, чтобы черезъ 12 лѣтъ имѣть 6720 р.?

203. Черезъ сколько лѣтъ капиталъ въ 20728 руб. обратится въ 50000 руб., считая по $4\frac{1}{2}$%?

203. Черезъ сколько лѣтъ капиталъ въ 18978 руб. обратится въ 48593 руб., считая по $7\frac{1}{2}$%?

204. При какихъ процентахъ капиталъ въ 2498 р. 60 к. обратится черезъ 12 лѣтъ въ 4000 р.?

204. При какихъ процентахъ капиталъ въ 2465 р. обратится черезъ 10 лѣтъ въ 4015 р. 30 к.?

205. Какую сумму можно взять въ долгъ по 4%, выдавая вексель въ 7622 р. 66 к. срокомъ на $10\frac{3}{4}$ года?

205. На какую сумму нужно выдать вексель, занимая 18963 р. 80 к. по 5% срокомъ на $5\frac{1}{3}$ года?

206. При какихъ процентахъ капиталъ черезъ 10 лѣтъ удвоится?

206. При какихъ процентахъ капиталъ черезъ 20 лѣтъ удвоится?

207. Нѣкто далъ 8000 р. взаймы подъ вексель срокомъ на 3 года и условился съ должникомъ въ томъ, что проценты должны присчитываться къ капиталу по $1\frac{1}{4}$% черезъ каждые три мѣсяца. На какую сумму онъ взялъ вексель?

207. Нѣкто выдалъ вексель на 12000 р. срокомъ на 4 года, условившись съ кредиторомъ въ томъ, что проценты на долгъ присчитываются къ капиталу по $4\frac{3}{4}\%$ черезъ каждые 4 мѣсяца. Сколько онъ взялъ взаймы?

208. Во сколько лѣтъ учетверится капиталъ, отданный по $6\frac{1}{4}\%$?

208. Во сколько лѣтъ удвоится капиталъ, отданный по $5\frac{1}{2}\%$?

209. На сколько процентовъ нужно отдать въ ростъ капиталъ 20728 р., чтобы по истеченіи 20 лѣтъ изъ него образовалась сумма, приносящая при 5% 2500 р. ежегоднаго дохода?

209. На сколько процентовъ нужно отдать въ ростъ капиталъ 29273 р., чтобы по истеченіи 10 лѣтъ изъ него образовалась сумма, приносящая при 6% 3000 р. ежегоднаго дохода?

210. Черезъ сколько лѣтъ 9000 р. при 6% обратятся въ ту же сумму, въ какую обращаются 8443 р. при 4% въ 15 лѣтъ?

210. Черезъ сколько лѣтъ 4231 р. 20 к. при 4% обратятся въ ту же сумму, въ какую обращаются 4500 р. при 6% въ 9 лѣтъ?

211. Какая сумма составится къ концу t-го года отъ ежегоднаго внесенія въ сохранную кассу въ началѣ каждаго года по a рублей, считая сложные проценты по p со ста?

211. Какая сумма составится по истеченіи t лѣтъ отъ ежегоднаго внесенія въ сохранную кассу въ концѣ каждаго года по a рублей, считая сложные проценты по p со ста?

212. Нѣкто внесъ въ банкъ единовременно a рублей и сверхъ того ежегодно прибавлялъ въ концѣ каждаго года по b рублей. Какой капиталъ составится у него по истеченіи t лѣтъ?

212. Нѣкто внесъ въ банкъ единовременно a рублей, но сверхъ того при этомъ же взносѣ и далѣе въ началѣ каждаго года прибавлялъ по b рублей. Какой капиталъ составится къ концу t-го года?

213. Какой капиталъ накопится въ теченіе 10 лѣтъ, если въ началѣ каждаго года вносить по 200 р. въ банкъ, платящій 5%?

213. Какой капиталъ накопится по истеченіи 20 лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить по 300 р. въ банкъ, платящій 4%?

214. Какой капиталъ накопится по истеченіи 15 лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить по 5000 р. въ банкъ, платящій $4\frac{1}{2}\%$?

214. Какой капиталъ накопится въ теченіе 12 лѣтъ, если въ началѣ каждаго года вносить по 7000 р. въ банкъ, платящій $5\frac{1}{2}\%$?

215. Поскольку нужно вносить въ началѣ каждаго года, чтобы въ теченіе 30 лѣтъ при 6% прибыли накопить 29916 р.?

215. Поскольку нужно вносить въ концѣ каждаго года, чтобы по истеченіи 25 лѣтъ при 3% прибыли накопить 16827 р.?

216. Поскольку нужно вносить въ концѣ каждаго года, чтобы по истеченіи 25 лѣтъ при $4\frac{3}{4}\%$ прибыли накопить 12358 р.?

216. Поскольку нужно вносить въ началѣ каждаго года, чтобы въ теченіе 15 лѣтъ при $4\frac{1}{4}\%$ прибыли накопить 17396 р.?

217. Во сколько лѣтъ можно накопить 16770 р. при 6%, если вносить въ началѣ каждаго года по 1200 р.?

217. Во сколько лѣтъ можно накопить 35059 р. при 10%, если вносить въ началѣ каждаго года по 2000 р.?

218. Во сколько лѣтъ можно накопить 5865 р. 65 к. при 8%, если вносить въ концѣ каждаго года по 1000 р.?

218. Во сколько лѣтъ можно накопить 1197 р. 57 к. при 7%, если вносить въ концѣ каждаго года по 100 р.?

219. Нѣкто внесъ въ банкъ 15600 р. по 5% и по истеченіи каждаго года бралъ по 600 р.. Сколько останется у него по истеченіи 10 лѣтъ?

219. Нѣкто внесъ въ банкъ 3740 р. по 4% и по истеченіи каждаго года прибавлялъ по 450 р.. Сколько составится у него по истеченіи 8 лѣтъ?

220. Нѣкто внесъ въ банкъ 3600 р по 4% и по истеченіи каждаго года прибавлялъ по 300 р.. Сколько составится у него по истеченіи 17 лѣтъ?

220. Нѣкто внесъ въ банкъ 18720 р. по 6% и по истеченіи каждаго года бралъ по 1560 р., Сколько останется у него по истеченіи 12 лѣтъ?

221. Долгъ въ A рублей по p процентовъ погашается ежегодными взносами въ концѣ каждаго года по a рублей въ теченіе t лѣтъ. Какова связь между всѣми указанными числами?

221. Взносъ A рублей по p процентовъ даетъ возможность въ концѣ каждаго года получать ренту по a рублей въ теченіе t лѣтъ. Какова связь между всѣми указанными числами?

222. Поскольку нужно платить ежегодно, чтобы въ 10 лѣтъ погасить долгъ въ 3680 р. 40 к., считая по 6%?

222. Какую ежегодную ренту можно получать въ теченіе 20 лѣтъ, внеся единовременно 7477 р. 50 к. на 5%?

223. Какой долгъ, сдѣланный по 4%, можно погасить въ 5 лѣтъ ежегодными взносами по 857 р. 36 к.?

223. Сколько нужно единовременно внести въ банкъ по 8% чтобы обезпечить на 10 лѣтъ ежегодную ренту въ 1490 р. 50 к.?

224. Во сколько лѣтъ можно уплатить долгъ въ 20270 р. при 5%, уплачивая ежегодно по 2625 р.?

224. На сколько лѣтъ единовременный взносъ въ 6210 р. при 6% обезпечиваетъ ежегодную ренту въ 1000 р.?

225. Во сколько полныхъ лѣтъ и съ какой дополнительной уплатой можно погасить долгъ въ 5000 р. при 6% ежегодными взносами по 450 р.?

225. Во сколько полныхъ лѣтъ и съ какой дополнительной уплатой можно погасить долгъ въ 3500 р. при 5% ежегодными взносами по 240 р.?

226. Какой капиталъ a нужно положить въ банкъ по p процентовъ на s лѣтъ, чтобы по истеченіи этого срока пользоваться въ теченіе t лѣтъ ежегоднымъ въ концѣ каждаго года доходомъ по b рублей?

226. Какую сумму a нужно вносить ежегодно въ началѣ каждаго года въ банкъ въ теченіе s лѣтъ при p процентахъ, чтобы по истеченіи этого срока еще черезъ t лѣтъ получить сразу b рублей?

227. Какой капиталъ нужно положить въ банкъ по 5% на 15 лѣтъ, чтобы послѣ этого въ теченіе 20 лѣтъ пользоваться ежегоднымъ доходомъ по 1000 р.?

227. Какой капиталъ нужно положить въ банкъ по 4% на 20 лѣтъ, чтобы послѣ этого въ теченіе 10 лѣтъ пользоваться ежегоднымъ доходомъ по 1500 р.?

228. Какую сумму нужно вносить ежегодно въ началѣ каждаго года въ банкъ въ теченіе 12 лѣтъ при $6\frac{1}{2}$%, чтобы затѣмъ, выждавъ еще 8 лѣтъ, получить сразу 30000 р.?

228. Какую сумму нужно вносить ежегодно въ началѣ каждаго года въ банкъ въ теченіе 15 лѣтъ при $4\frac{1}{2}$%, чтобы затѣмъ, выждавъ еще 6 лѣтъ, получить сразу 24000 р.?

229. Сколько времени долженъ быть на 4% капиталъ 9634 р., чтобы по истеченіи искомаго срока владѣлецъ капитала былъ обезпеченъ на 25 лѣтъ ежегодной рентой въ 2000 р., выдаваемой въ концѣ каждаго года?

229. Сколько времени можно пользоваться ежегодно въ концѣ каждаго года рентой въ 3000 р., если эта рента составляется отъ капитала въ 9105 р. 20 к., помѣщеннаго въ банкъ на 20 лѣтъ при 6%?

230. Нѣкто въ теченіе 20 лѣтъ вносилъ въ концѣ каждаго года по 900 р. въ банкъ на $4\frac{1}{2}$% и собралъ такой капиталъ, который далъ ему возможность въ слѣдующія затѣмъ 15 лѣтъ получать въ концѣ каждаго года одинаковую пенсію. Какъ велика была эта пенсія?

230. Нѣкто въ теченіе 30 лѣтъ вносилъ въ концѣ каждаго года по одинаковой суммѣ денегъ въ банкъ на $5\frac{1}{2}$% и собралъ такой капиталъ, который далъ ему возможность въ слѣдующія затѣмъ 20 лѣтъ получать въ концѣ каждаго года пенсію въ 1500 р.. Какъ великъ былъ первоначальный ежегодный взносъ?

ОТДѢЛЕНІЕ XIV.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЯ СТАТЬИ.

§ 1. Общій наибольшій дѣлитель и наименьшее кратное.

Отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ многочленовъ.

1. $3x^3-22x^2+30x+27$ и $x^2-8x+15$

1. $4x^3-20x^2+6x+40$ и $3x^2-8x-16$

2. $30a^3+45a^2-10a-15$ и $20a^2+26a-6$.

2. $18a^3-12a^2+9a-6$ и $30a^2-14a-4$

3. $36x^4-54x^3+78x^2+18x-30$ и $18x^3-9x^2+18x+45$

3. $54x^4-18x^3+54x^2+6x-24$ и $24x^3-44x^2+44x-48$

4. $2a^4+3a^3x-9a^2x^2$ и $12a^4x-34a^3x^2+28a^2x^3-6ax^4$

4. $6a^4+13a^3x-5a^2x^2$ и $12a^4x+12a^3x^2-39a^2x^3+15ax^4$

5. $20a^6b+24a^4b^3-52a^5b^2$ и $5a^3b^2+15a^5-30a^4b-10a^2b^3$

5. $ab^4-3a^4b-2a^3b^2-2a^2b^3$ и $2ab^3+3a^3b-7a^2b^2$

6. $3a^3x^3-6a^4x^2+3a^2x^4-3a^5x-6a^6$ и $8a^5+2a^3x^2-8a^4x+4a^2x^3$

6. $a^4x^2-a^6+2a^5x-3a^3x^3+2a^2x^4$ и $12a^3x^5+4a^5x^3-10a^4x^4-a^6x^2$

7. $90a^2b+60a^4b-130a^3b-20ab$ и $18ac+12a^5c+42a^3c-18a^4c-54a^2c$

7. $60a^3b+50a^2b+30b-40ab$ и $15a^4b^2-10a^3b^2-25a^2b^2+20ab^2-10b^2$

8. $36a^2b^3c^2+24a^5c^2-12a^3b^2c^2-24a^4bc^2-36ab^4c^2$ и $54a^4c^4-$
$-108ab^3c^4-81a^2b^2c^4+72a^3bc^4$

8. $18a^4bc^2+18a^3b^2c^2-36a^2b^3c^2-18ab^4c^2-36b^5c^2$ и $16a^3bc^3+$
$+8a^2b^2c^3-32b^4c^3-32ab^3c^3$

9. $x^3+(a+1)x^2-(a^2+2a)x+a^2-a^3$ и $2x^2-(2a-1)x-a$

9. $x^3-(4a+b)x^2+(3a^2+4ab)x-3a^2b-b^3$ и $x^3-(a+b)x^2-$
$-(30a^2-ab)x+30a^2b$.

10. $x^4-(a+3)x^3+(3a+2)x^2-2(a+3)x+6a$ и $x^3-(a+4)x^2+$ $+(4a+3)x-3a$.

10. $2(a^3-2a^2b-ab^2+2b^3)x^3+3(a^2-b^2)x^2-(2a^3-a^2b-2ab^2+b^3)$ и $3(a^3-4a^2b+5ab^2-2b^3)x^3+7(a^2-2ab+b^2)x^2-(3a^3-5a^2b+$ $+ab^2+b^3)$.

Отысканіе общаго наибольшаго дѣлителя трехъ многочленовъ.

11. $a^3-2a^2b-4ab^2+8b^3$, $a^3-12ab^2+16b^3$ и $a^3-4a^2b-4ab^2+16b^3$

11. $2a^3-7a^2b-2ab^2+7b^3$, $2a^2-3ab-14b^2$ и $4a^3-24a^2b+41ab^2-21b^3$

12. $3x^3-7x^2y+5xy^2-y^3$, $x^2y+3xy^2-3x^3-y^3$ и $3x^3+5x^2y+xy^2-y^3$

12. $4x^3-12x^2y-9xy^2+27y^3$, $4x^3-27xy^2-27y^3$ и $2x^3+5x^2y-$ $-9xy^2-18y^3$.

Отысканіе общаго наименьшаго кратнаго двухъ многочленовъ.

13. $4a^3-4a^2-a+1$ и $3a^2-5a+2$

13. $a^3-9a^2+23a-15$ и a^2-8a+7

14. $4a^3+4a^2+3a+9$ и $2a^3-5a^2-2a+15$

14. $6a^3-19a^2+13a-2$ и $6a^3-7a^2+8a-4$

15. $x^3-6x^2+11x-6$ и $x^3-9x^2+26x-24$

15. $x^3-9x^2+26x-24$ и $x^3-8x^2+19x-12$

16. $3a^3-7a^2b+5ab^2-b^3$ и $a^2b+3ab^2-3a^3-b^3$

16. $3a^3+5a^2b+ab^2-b^3$ и $3a^3-7a^2b+5ab^2-b^3$

17. $6x^3+5x^2-23x+5$ и $18x^3-18x^2-14x+4$

17. $12x^3-60x^2+57x+9$ и $30x^3-69x^2-141x-18$

18. $6x^3-5x^2y-27xy^2+5y^3$ и $3x^3+14x^2y+14xy^2-3y^3$

18. $10x^3+13x^2y+xy^2+6y^3$ и $15x^3+7x^2y+4xy^2+4y^3$.

Отысканіе общаго наименьшаго кратнаго трехъ многочленовъ.

19. $x^3-19x-30$, $x^3-15x-50$ и $x^2-2x-15$

19. $x^3-37x-84$, $x^3-39x-70$ и x^2+5x+6

20. x^3-7x-6, $3x^3-5x^2-16x+12$ и $3x^3-8x^2-5x+6$

20. $x^3-19x+30$, $2x^3+7x^2-24x-45$ и $2x^3+9x^2-11x-30$.

§ 2. Соединенія.

21. Составить перестановки изъ трехъ элементовъ.

21. Составить перестановки изъ четырехъ элементовъ.

22. Составить размѣщенія изъ четырехъ элементовъ по три.

22. Составить размѣщенія изъ пяти элементовъ по три.

23. Составить посредствомъ размѣщеній перестановки изъ трехъ элементовъ.

23. Составить посредствомъ размѣщеній перестановки изъ четырехъ элементовъ.

24. Составить размѣщенія всѣхъ видовъ изъ четырехъ элементовъ

24. Составить размѣщенія всѣхъ видовъ изъ пяти элементовъ

25. Составить сочетанія всѣхъ видовъ изъ четырехъ элементовъ

25. Составить сочетанія всѣхъ видовъ изъ пяти элементовъ.

26. Составить посредствомъ сочетаній размѣщенія всѣхъ видовъ изъ трехъ элементовъ.

26. Составить посредствомъ сочетаній размѣщенія всѣхъ видовъ изъ четырехъ элементовъ.

27. Выразить ариѳметически числа A_7^3, P_5, C_6^4.

27. Выразить ариѳметически числа A_8^5, P_6, C_{10}^4.

28. Выразить ариѳметически числа P_8, A_{1}^7, C_{11}.

28. Выразить ариѳметически числа P_{11}, A_{15}^9, C_{18}^7.

29. Выразить число размѣщеній изъ $n+1$ элементовъ по $k-1$ въ каждомъ размѣщеніи.

29. Выразить число размѣщеній изъ $n-2$ элементовъ по $k+1$ въ каждомъ размѣщеніи.

30. Выразить число размѣщеній изъ $m+n$ элементовъ по $m \quad n+1$ въ каждомъ размѣщеніи.

30. Выразить число размѣщеній изъ $m \quad n$ элементовъ по $m-2n \quad 1$ въ каждомъ размѣщеніи.

31. Провѣрить равенства $C_9^4=C_9$ и $C_{12}^7=C_{12}^5$ посредствомъ приведенія дробей къ общему числителю.

31. Провѣрить равенства $C_8^5=C_8^3$ и $C_{15}^7-C_{15}^8$ посредствомъ приведенія дробей къ общему числителю.

32. Провѣрить равенства $C_6^4+C_6^3-C_7^4$ и $C_{10}^6+C_{10}^5=C_{11}^6$ посредствомъ вывода общихъ множителей и дѣлителей за скобку.

32. Провѣрить равенства $C_7^5+C_7^4 \quad C_8^5$ и $C_{12}^6+C_{12}^5=C_{13}^6$ посредствомъ вывода общихъ множителей и дѣлителей за скобку.

33. Выразить число сочетаній изъ $n+2$ элементовъ по $k-1$ въ каждомъ сочетаніи.

33. Выразить число сочетаній изъ $n-1$ элементовъ по $k+2$ въ каждомъ сочетаніи.

34. Выразить число сочетаній изъ $m-n$ элементовъ по $n+1$ въ каждомъ сочетаніи.

34. Выразить число сочетаній изъ $m+n$ элементовъ по $n-2$ въ каждомъ сочетаніи.

35. Сколькими способами можно разсадить за столомъ четыре человѣка?

35. Сколькими способами можно разсадить за столомъ пять человѣкъ?

36. Сколькими способами можно составить четырехцвѣтные ленты изъ семи лентъ различныхъ цвѣтовъ?

36. Сколько различныхъ трехзначныхъ чиселъ можно написать при посредствѣ девяти цифръ?

37. Сколькими способами можно выбрать четыре лица на четыре различныя должности изъ девяти кандидатовъ на эти должности?

37. Сколькими способами можно выбрать четыре лица на четыре одинаковыя должности изъ девяти кандидатовъ на эти должности?

38. Сколько прямыхъ линій можно провести между десятью точками, расположенными такъ, что никакія три изъ нихъ не лежатъ на одной прямой?

38. Сколько окружностей можно провести между десятью точками, расположенными такъ, что никакія четыре изъ нихъ не лежатъ на одной окружности?

39. Изъ сколькихъ предметовъ можно составить 210 размѣщеній по два предмета въ каждомъ?

39. Изъ сколькихъ предметовъ можно составить 66 различныхъ паръ?

40. Сколько можно взять предметовъ, чтобы число размѣщеній изъ нихъ по 4 было въ 12 разъ больше числа размѣщеній по 2?

40. Сколько нужно взять предметовъ, чтобы число сочетаній изъ нихъ по 3 относилось къ числу сочетаній по 5, какъ 2 : 3?

41. Число сочетаній изъ n элементовъ по 3 въ 5 разъ меньше числа сочетаній изъ $n+2$ элементовъ по 4. Найти n.

41. Число размѣщеній изъ n элементовъ по 5 въ 18 разъ больше числа размѣщеній изъ $n-2$ элементовъ по 4. Найти n.

42. Число сочетаній изъ $2n$ элементовъ по $n+1$ относится къ числу сочетаній изъ $2n+1$ элементовъ по $n-1$, какъ 3 къ 5. Найти n

42. Число сочетаній изъ $2n$ элементовъ по $n-1$ относится къ числу сочетаній изъ $2n-2$ элементовъ по n, какъ 77 къ 20. Найти n.

43. Показать, что непосредственное опредѣленіе числа парныхъ сочетаній приводится къ суммированію разностной прогрессіи.

43. Показать, что непосредственное опредѣленіе числа тройныхъ сочетаній приводится къ суммированію ряда парныхъ произведеній.

44. Между перестановками цифръ числа 12345 сколько есть такихъ, которыя начинаются цифрой 1? числомъ 12? числомъ 123?

44. Между перестановками цифръ числа 12345 сколько есть такихъ, которыя не кончаются цифрой 5? числомъ 45? числомъ 345?

45. Между сочетаніями изъ 10 буквъ a, b, c.... по 4 сколько есть такихъ, которыя содержатъ букву a? буквы a и b?

45. Между сочетаніями изъ 10 буквъ a, b, c,.... по 4 сколько есть такихъ, которыя не содержатъ букву a? буквъ a и b?

46. Между размѣщеніями изъ 12 буквъ a, b, c,.... по 5 сколько есть такихъ, которыя содержатъ букву a? буквы a и b?

46. Между размѣщеніями изъ 12 буквъ a, b, c,... по 5 сколько есть такихъ, которыя не содержатъ букву a? буквъ a и b?

47. Между сочетаніями изъ n буквъ по k сколько есть такихъ, изъ которыхъ каждое содержитъ h опредѣленныхъ буквъ?

47. Между сочетаніями изъ n буквъ по k сколько есть такихъ, изъ которыхъ каждое не содержитъ h опредѣленныхъ буквъ?

48. Между размѣщеніями изъ n буквъ по k сколько такихъ, изъ которыхъ каждое содержитъ h опредѣленныхъ буквъ?

48. Между размѣщеніями изъ n буквъ по k сколько такихъ, изъ которыхъ каждое не содержитъ h опредѣленныхъ буквъ?

49. При какихъ и сколькихъ значеніяхъ k существуетъ неравенство $C_n^{k-1} < C_n^k$?

49. При какихъ и сколькихъ значеніяхъ k существуетъ неравенство $C_n^k > C_n^{k+1}$?

50. Показать, что при четномъ n въ рядѣ чиселъ сочетаній C_n^1, C_n^2,...., C_n^{n-1} имѣется одно среднее, наибольшее изъ всѣхъ число.

50. Показать, что при нечетномъ n въ рядѣ чиселъ сочетаній C_n^1, C_n^2,...., C_n^{n-1} имѣется два среднихъ, наибольшихъ изъ всѣхъ и равныхъ числа.

§ 3. Биномъ Ньютона.

Найти сокращеннымъ путемъ произведенія двучленовъ:

51. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 51. $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$
52. $(x-1)(x+3)(x-4)(x+5)$ 52. $(x+2)(x-3)(x+4)(x-6)$
53. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$
53. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$
54. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)$
54. $(x+2)(x-3)(x-4)(x+5)(x-6)$

Найти разложенія степеней двучленовъ:

55. $(a+b)^6$ 55. $(a+b)^8$ **56.** $(a-b)^7$ 56. $(a-b)^5$
57. $(a+1)^9$ 57. $(a+1)^{12}$ **58.** $(1-a)^8$ 58. $(1-a)^{10}$
59. $(a+b^2)^5$ 59. $(a^2-b)^9$ **60.** $(a-2b)^8$ 60. $(3b+a)^6$
61. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$ 61. $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^6$ **62.** $(\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{3b})^5$ 62. $(\sqrt{3a}+\sqrt{2b})^5$

63. Найти 5-й членъ разложенія $(a-b)^9$.

63. Найти 8-й членъ разложенія $(a-b)^{15}$.

64. Найти средній членъ разложенія $(a\quad b)^{14}$.

64. Найти два среднихъ члена разложенія $(a-b)^{17}$.

65. Въ разложеніи $(x+a)^{19}$ найти тѣ члены, которые содержатъ букву a въ 8-й степени,—букву x въ 8-й степени.

65. Въ разложеніи $(x+a)^{16}$ найти тѣ члены, которые содержатъ букву a въ 11-й степени,—букву x въ 11-й степени.

66. Въ разложеніи $(x^2-ax)^{24}$ найти тѣ члены, которыхъ коэффиціентъ есть число сочетаній по 18.

66. Въ разложеніи $(x^3-a^2x)^{31}$ найти тѣ члены, которыхъ коэффиціентъ есть число сочетаній по 7.

67. Въ разложеніи $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z})^9$ найти тотъ членъ, который послѣ упрощенія содержитъ букву z въ четвертой степени.

67. Въ разложеніи $(\sqrt[6]{z}+\sqrt[3]{z^2})^{12}$ найти тотъ членъ, который послѣ упрощенія содержитъ букву z въ шестой степени.

68. Въ разложеніи $\left(\frac{2z}{a^2}+\frac{a}{z}\right)^2$ найти членъ, не содержащій z.

68. Въ разложеніи $\left(\frac{z}{a}+\frac{3a^2}{z}\right)^{10}$ найти членъ, не содержащій z.

69. Коэффиціентъ третьяго члена разложенія $(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z})$, равенъ 78. Найти пятый членъ.

69. Коэффиціентъ третьяго члена разложенія $\left(\sqrt[3]{1+z}-\sqrt[3]{1-z}\right)^n$ равенъ 45. Найти четвертый членъ.

70. Сумма коэффиціентовъ при второмъ и третьемъ членахъ разложенія $\left(z\sqrt[3]{z}+z^{-1,8(6)}\right)^n$ равна 78. Опредѣлить членъ разложенія не содержащій z.

70. Сумма коэффиціентовъ при второмъ и третьемъ членахъ разложенія $\left(\sqrt[5]{z^2}+z^{0,1(6)}\right)^n$ равна 153. Опредѣлить членъ разложенія, не содержащій z.

§ 4. Непрерывныя дроби.

Обратить слѣдующія непрерывныя дроби въ простыя:

71. (2,1,2,3,2)	71. (2,2,1,2,3)
72. (2,3,1,1,12)	72. (1,1,3,4,15)
73. (0,2,1,4,3,2)	73. (0,1,2,1,3,2)
74. (0,3,1,1,2,14)	74. (0,4,1,1,1,25)
75. (a,b,a,b,a)	75. (b,a,a,b,b)
76. $(0,x,3x,x,2x)$	76. $(0,x,2x,x,3x)$
77. $(a-1,a,a+1,a)$	77. $(a+1,a,a-1,a)$
78. $(0,x-1,x-2,x+3,x-2)$	78. $(0,x-2,x+2,x,x+1)$

Обратить слѣдующія простыя дроби въ непрерывныя:

79. $\frac{117}{55}$	79. $\frac{157}{68}$	**80.** $\frac{151}{45}$	80. $\frac{134}{35}$
81. $\frac{117}{139}$	81. $\frac{115}{151}$	**82.** $\frac{47}{64}$	82. $\frac{29}{81}$
83. $\frac{239}{99}$	83. $\frac{121}{84}$	**84.** $\frac{137}{52}$	84. $\frac{174}{127}$
85. $\frac{71}{193}$	85. $\frac{243}{296}$	**86.** $\frac{76}{123}$	86. $\frac{463}{640}$

87. $\frac{a^4+2a^2+1}{a^3+a-1}$	87. $\frac{a^4+2a^3+2a^2+a+1}{a^3+2a^2+a}$
88. $\frac{x^4+x^2-1}{x^3+x^2+x+1}$	88. $\frac{x^4+2x^2-x}{x^3+x^2+2x+1}$

Слѣдующія дроби обратить въ простыя, а затѣмъ выразить обыкновенными непрерывными дробями:

89. (1,—2,—1,—2)	89. (1,—3,2,—3)
90. (2,—3,4,—5)	**90. (1,—4,5,—7)**

Найти приближенія къ слѣдующимъ непрерывнымъ дробямъ и вычислить предѣлы ошибки этихъ приближеній:

91. $\frac{99}{239}$ 91. $\frac{55}{117}$ **92.** $\frac{685}{126}$ 92. $\frac{373}{169}$

93. $\frac{55}{89}$ 93. $\frac{463}{640}$ **94.** $\frac{1264}{465}$ 94. $\frac{1022}{839}$

95. $\frac{3370}{399}$ 95. $\frac{648}{385}$ **96.** $\frac{479}{6628}$ 96. $\frac{3696}{11593}$

97. $\frac{1702}{3919}$ 97. $\frac{1423}{1967}$ **98.** 3,1415926 98. 2,7182818

Найти приближенія къ безконечнымъ непрерывнымъ дробямъ и опредѣлить предѣлы ихъ ошибокъ:

99. (1,3,5,7,9,11,....) 99. (2,4,6,8,10,12,....)

100. (0,10,100,1000,....) 100. (0,5,50,500,....)

Обратить слѣдующіе корни въ непрерывныя дроби:

101. $\sqrt{2}$ 101. $\sqrt{5}$ **102.** $\sqrt{3}$ 102. $\sqrt{11}$

103. $\sqrt{20}$ 103. $\sqrt{12}$ **104.** $\sqrt{7}$ 104. $\sqrt{13}$

105. $\sqrt{19}$ 105. $\sqrt{47}$ **106.** $\sqrt{31}$ 106. $\sqrt{23}$

107. $\sqrt{a^2+1}$ 107. $\sqrt{a^2+2}$ **108.** $\sqrt{a^2+2a}$ 108. $\sqrt{a^2+a}$

109. $\sqrt{a^2-1}$ 109. $\sqrt{a^2-a}$ **110.** $\sqrt{a^2-2a}$ 110. $\sqrt{a^2-3a+2}$

Обратить слѣдующія дроби въ ирраціональныя выраженія:

111. (4,8,8,8,....) 111. (5,10,10,10,....)

112. (3,1,6,1,6,....) 112. (3,2,6,2,6,....)

113. (0,2,3,2,3,2,3,....) 113. (0,1,2,1,2,1,2,....)

114. (4,1,3,1,8,1,3,1,8,....) 114. (5,1,4,1,10,1,4,1,10,....)

115. (2,1,1,3,1,1,3,....) 115. (2,1,2,3,1,2,3,....)

116. (a,2,2a,2,2a,....) 116. (a,1,2a,1,2a,....)

Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ слѣдующія неопредѣленныя уравненія

117. $8x+13y=1$ 117. $7x+12y=1$

118. $9x-14y=3$ 118. $10x-17y=2$

119. $23x+16y=2$ 119. $41x+29y=1$

120. $7x-11y=1$ 120. $17x-25y=3$

121. $49x+34y=6$ 121. $29x+17y=25$

122. $17x-19y=23$ 122. $99x-70y=13$

123. $55x+34y=20$ 123. $19x-11y=112$

124. $149x-344y=25$ 124. $355x+113y=2$

Разложить въ непрерывныя дроби и вычислить приближенно слѣдующіе логариѳмы:

125. 72^x—432 125. 36^x 432

126. 50^x—500 126. 75^x 375

Разложить въ непрерывныя дроби и вычислить приближенно дѣйствительные корни слѣдующихъ уравненій:

127. $x^3-2x-5-0$ 127. $x^3-x-3-0$

128. $x^3+x^2+x-1 \quad 0$ 128. $x^3+x^2+x-2-0$

129. Показать, что $\sqrt{a^2+b}$ разлагается въ непрерывную дробь $\left(\begin{matrix} b,\ b,\ b,\ldots \\ a,2a,2a,2a,\ldots \end{matrix}\right)$.

129. Показать, что корень уравненія $x^2 \quad ax \quad b-0$ разлагается въ непрерывную дробь $\left(\begin{matrix} b,b,b,\ldots \\ a,a,a,a,\ldots \end{matrix}\right)$.

130. Найти и доказать для дроби $\left(\begin{matrix} b_1,b_2,b_3,\ldots \\ a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots \end{matrix}\right)$ законъ составленія приближеній.

130. Найти и доказать для дроби $\left(\begin{matrix} b_1,b_2,b_3,\ldots \\ a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots \end{matrix}\right)$ законъ разности двухъ смежныхъ приближеній.

§5. Отысканіе наименьшихъ и наибольшихъ значеній.

131. Опредѣлить наименьшее значеніе трехчлена ax^2+bx+c при всевозможныхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x и при a положительномъ.

131. Опредѣлить наибольшее значеніе трехчлена ax^2+bx+c при всевозможныхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x и при a отрицательномъ.

132. Разложить число a на два слагаемыхъ такъ, чтобы произведеніе этихъ слагаемыхъ было наибольшее.

132. Разложить число a на два множителя такъ, чтобы сумма этихъ множителей была наименьшая.

133. Опредѣлить тотъ изъ прямоугольниковъ, имѣющихъ данную площадь k^2, котораго периметръ $2p$ есть наименьшій.

133. Опредѣлить тотъ изъ прямоугольниковъ, имѣющихъ данный периметръ $2p$, котораго площадь k^2 есть наибольшая.

134. Опредѣлить тотъ изъ прямоугольниковъ, имѣющихъ даннук діагональ c, котораго периметръ $2p$ есть наибольшій.

134. Опредѣлить тотъ изъ прямоугольниковъ, имѣющихъ данный периметръ $2p$, котораго діагональ c есть наименьшая.

135. Опредѣлить прямоугольный параллелепипедъ даннаго объема n^3, котораго полная поверхность $2k^2$ есть наименьшая.

135. Опредѣлить прямоугольный параллелепипедъ данной поверхности $2k^2$, котораго объемъ n^3 есть наибольшій.

136. Опредѣлить прямоугольный параллелепипедъ съ данной діагональю c, котораго полная поверхность $2k^2$ есть наибольшая.

136. Опредѣлить прямоугольный параллелепипедъ данной поверхности $2k^2$, котораго діагональ c есть наименьшая.

137. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ при всевозможныхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x и при условіи $n^2>4mp$.

137. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ при всевозможныхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x и при условіи $n^2<4mp$.

138. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{8x^2+4x+11}{2x^2+2}$.

138. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$.

139. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}$.

139. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{2x^2+3x-5}{2x^2+9x+10}$.

140. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{x^2-5}{2x+4}$.

140. Найти наибольшее и наименьшее значенія дроби $\frac{4x^2-4x}{3-4x}$.

§ 6. Способъ неопредѣленныхъ множителей.

141. Опредѣлить такой двучленъ первой степени $ax+b$, который обращался бы въ -2 при $x=1$ и въ 1 при x 2.

141. Опредѣлить такой трехчленъ второй степени ax^2+bx+c, который обращался бы въ $6\frac{2}{3}$ при $x=1$, въ 0 при $x=3$ и въ $14\frac{2}{3}$ при $x=5$.

142. Найти частное и остатокъ отъ дѣленія $2x^4-5x^3-3x^2+$ $+15x-7$ на x^2-3, не производя дѣленія.

142. Найти частное и остатокъ отъ дѣленія $6x^4-23x^3+$ $+44x^2-41x$ на $2x^2-3x+7$, не производя дѣленія.

143. Извлечь корень третьей степени изъ многочлена x^6-15x^5+ $+81x^4-185x^3+162x^2-60x+8$.

143. Извлечь корень четвертой степени изъ многочлена $81x^4-$ $-108x^3+54x^2-12x+1$.

144. Найти корень третьей степени и остатокъ отъ извлеченія корня изъ многочлена $8x^6-36x^4+41x^2-18$.

144. Найти корень четвертой степени и остатокъ отъ извлеченія корня изъ многочлена $x^8-8x^6+22x^4-5x^3-20x^2+7$.

145. Разложить дробь $\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}$ въ сумму дробей, которыхъ знаменателями были бы три множителя даннаго знаменателя.

145. Разложить дробь $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$ въ сумму простѣйшихъ дробей вида $\frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+1}$.

146. Разложить дробь $\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$ въ сумму дробей, которыхъ знаменателями были бы четыре множителя даннаго знаменателя.

146. Разложить дробь $\frac{2x^3-5x^2+6x-11}{2(x^4-1)}$ въ сумму простѣйшихъ дробей вида $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}$.

147. Вывести условіе, при которомъ многочленъ $4x^4-4ax^3+$ $+4bx^2+2acx+c^2$ представляетъ квадратъ многочлена второй степени относительно x.

147. Вывести условіе, при которомъ многочленъ x^3+px+q дѣлится вполнѣ на квадратъ двучлена $(x-a)^2$.

148. Разложить выраженіе $2x^2-10xy+15y+x-6$ на два множителя первой степени относительно x и y.

148. Разложить выраженіе $2x^2-21xy-11y^2-x+34y-3$ на два множителя первой степени относительно x и y.

149. Вывести условіе, при которомъ, умноживъ одно изъ двухъ уравненій $ax+by+c=0$ и $a_1x+b_1y+c_1=0$ на нѣкотораго множителя k и сложивъ ихъ, получимъ уравненіе тождественное съ третьимъ $a_2x+b_2y+c_2=0$.

149. Вывести условіе, при которомъ, умноживъ одно изъ двухъ уравненій $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ и $x^4+p_1x^3+q_1x^2+r_1x+s_1=0$ на нѣкотораго множителя k и сложивъ ихъ, получимъ возвратное уравненіе.

150. Представить трехчленъ $5x^2-4xy+25y^2$ въ видѣ суммы квадратовъ вида $(ax+by)^2+(x+cy)^2$.

150. Представить многочленъ $x^4-2x^3\ \ x^2-6x$ въ видѣ разности квадратовъ вида $(x^2+bx+c)^2-(b_1x+c_1)^2$.

§ 7. Общія свойства системы счисленія.

151. Выразить число 327 по пятиричной системѣ счисленія.

151. Выразить число 485 по девятиричной системѣ счисленія.

152. Найти число, которое при семиричной системѣ счисленія выражается въ видѣ $(2504)_7$.

152. Найти число, которое при шестиричной системѣ счисленія выражается въ видѣ $(3052)_6$.

153. Написать по 12-ричной системѣ общій видъ трехзначнаго числа.

153. Написать по 15-ричной системѣ общій видъ четырехзначнаго числа.

154. Опредѣлить число, сумма двухъ цифръ котораго по 11-ричной системѣ равна 18 и отъ прибавленія къ которому числа $(19)_{11}$ получается число, обозначенное при той же системѣ счисленія прежними цифрами, но въ обратномъ порядкѣ.

154. Опредѣлить число, сумма трехъ цифръ котораго по 8-ричной системѣ равна 12, при чемъ средняя цифра есть 0, и отъ вычитанія изъ котораго числа $(176)_8$ получается число, обозначенное при той же системѣ счисленія прежними цифрами, но въ обратномъ порядкѣ.

155. Написать при произвольномъ основаніи форму числа (3052) и указать единственное ограниченіе, которому подчиняется основаніе.

155. Написать при произвольномъ основаніи форму числа (7205) и указать единственное ограниченіе, которому подчиняется основаніе.

156. Найти основаніе, при которомъ число 1463 выражается въ видѣ (2005).

156. Найти основаніе, при которомъ число 2704 выражается въ видѣ (20304).

157. Произвести дѣйствія $(7253)_8+(4562)_8$ и $(12132)_5-(4341)_5$

157. Произвести дѣйствія $(3132)_4+(2321)_4$ и $(26437)_9-(8784)_9$

158. Произвести дѣйствія $(27)_9.(34)_9$ и $(758)_{11}:(32)_{11}$.

158. Произвести дѣйствія $(65)_7:(23)_7$ и $(1515)_{13}:(36)_{13}$.

159. Показать, что число вида (12321) при всякомъ основаніи есть полный квадратъ, а число (1030301) также всегда есть полный кубъ.

159. Показать, что число вида (1234321) при всякомъ основаніи есть полный квадратъ, а число (1331) также всегда есть полный кубъ.

160 Найти общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшее кратное чиселъ (1122) и (1326) при произвольномъ основаніи.

160. Найти общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшее кратное чиселъ (1332) и (2331) при произвольномъ основаніи.

ОБЩІЙ ОТДѢЛЪ.

1. Составить квадратное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, зная, что одинъ изъ корней его равенъ дроби $\frac{a}{b}$, а другой дроби $\frac{a^2-b^2}{7a}$ и что a и b суть корни уравненій $a^3-b^3=37ab$ и $a \quad b=12$.

2. Проданы часы за a рублей и при этомъ получено столько процентовъ прибыли, сколько рублей стоили часы самому продавцу. Число a обладаетъ слѣдующими признаками: 1) оно двузначное, 2) если его раздѣлить на произведеніе его цифръ, то въ частномъ получимъ 1 и въ остаткѣ 26, 3) если цифры его переставимъ и вновь полученное число раздѣлимъ на произведеніе его цифръ, то въ частномъ получится 2 и въ остаткѣ 5. Сколько рублей стоили часы первоначально?

3. Купецъ купилъ чаю и кофе и заплатилъ за все столько рублей, сколько единицъ въ положительномъ корнѣ уравненія $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16}=1$. Вскорѣ онъ продалъ купленный имъ чай за 55 руб., а кофе за 27 руб.. При этой продажѣ онъ получилъ на чаѣ прибыль, а на кофе убытокъ, такъ притомъ, что число процентовъ прибыли оказалось равнымъ числу процентовъ убытка. Сколько рублей платилъ онъ самъ за чай и за кофе?

4. Два поѣзда выходятъ изъ двухъ городовъ, разстояніе между которыми равно 360 верстамъ, и идутъ навстрѣчу другъ другу. Они могутъ встрѣтиться на полпути, если второй поѣздъ выйдетъ на $1\frac{1}{2}$ часа раньше перваго. Если же оба поѣзда выйдутъ одновременно, то черезъ столько часовъ, сколько единицъ въ выраженіи $\sqrt{26-\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$, разстояніе между ними составитъ четверть первоначальнаго. Опредѣлить скорости поѣздовъ.

5. Дано уравненіе $10x^2 \quad 19x+6=0$. Не рѣшая его, составить такое уравненіе 4-й степени, чтобы два его корня были равны корнямъ даннаго, а два остальные соотвѣтственно обратнымъ количествамъ.

6. Число a разложить на такія двѣ части, чтобы сумма частныхъ, происходящихъ отъ дѣленія первой части на вторую и второй на первую, была равна b. Извѣстно, что числа a и b имѣютъ свойство обращать соотвѣтственно многочлены $a^4+6a^3+11a^2+3a+31$ и $b^4+8b^3+4b^2-49b+38$ въ полные квадраты.

7. Куплены на два рубля почтовыя марки двухъ родовъ по a копѣекъ и b копѣекъ за штуку. Извѣстно, что числа a и b удовлетворяютъ уравненіямъ $\sqrt[a-b]{a+b}=2\sqrt{3}$ и $(a+b).2^{b-a}=3$. Сколько тѣхъ и другихъ марокъ было куплено?

8. Опредѣлить два положительныхъ цѣлыхъ числа, зная, что одно изъ нихъ кратно четыремъ, а другое кратно пяти, и что сумма ихъ есть двузначное число такого свойства, что произведеніе чиселъ единицъ обоихъ его разрядовъ равно 12, а сумма этихъ чиселъ, сложенная съ суммой ихъ квадратовъ, равна 32.

9. Нѣкто отдалъ въ ростъ на простые проценты капиталъ a рублей, который по истеченіи неизвѣстнаго времени превратился въ 436 рублей. Если бы онъ отдалъ тотъ же капиталъ на проценты однимъ меньше, но на срокъ годомъ больше, то капиталъ этотъ превратился бы въ 442 рубля. Извѣстно, что a есть число кратное 100 и дающее при дѣленіи на 17 въ остаткѣ 9. На сколько времени капиталъ былъ отданъ въ ростъ и поскольку процентовъ?

10. Сумма двухъ капиталовъ, отданныхъ въ ростъ на простые проценты, равна наименьшему четырехзначному числу, которое, будучи кратнымъ 200, дастъ при дѣленіи на 23 въ остаткѣ 21. Сумма процентовъ равна $\sqrt{3^{1,5}+\sqrt[3]{830584}+3\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$. Процентныя деньги съ перваго капитала 112 рублей, а со второго 72 рубля. Опредѣлить капиталы и узнать, поскольку процентовъ каждый изъ нихъ отданъ въ ростъ?

---

11. Стороны прямоугольнаго треугольника составляютъ разностную прогрессію. Площадь треугольника равна $10^{\frac{1}{2}-lg_{10}0,375\sqrt{10}}$ кв. дюймовъ. Найти стороны.

12. Если разложимъ выраженіе $4(ad+bc)^2-(a^2+d^2\ b^2-c^2)^2$ на множителей первой степени и если возьмемъ потомъ сумму этихъ множителей и въ ней примемъ $a=100$, b—161, c 200 и $d=134$ то результатъ подстановки будетъ въ 2 раза больше суммы членовъ разностной прогрессіи, которой первый членъ 11, а разность 3 Изъ сколькихъ членовъ состоитъ прогрессія?

13. Первый членъ разностной прогрессіи равенъ числу, логариѳмъ котораго при основаніи $\sqrt[3]{9}$ есть 1,5. Если произведеніе первыхъ трехъ членовъ этой прогрессіи раздѣлить поочередно на каждый изъ нихъ, то сумма полученныхъ частныхъ будетъ 299 Найти сумму 10 первыхъ членовъ этой прогрессіи.

14. Первый членъ разностной прогрессіи равенъ большему, а разность ея меньшему изъ дѣйствительныхъ корней уравненія $x^{2\lg^2 x-1,5\lg x}=\sqrt{10}$. Сколько членовъ нужно взять, начиная съ перваго, чтобы ихъ сумма была равна $\sqrt[3]{498677257}$?

15. Три измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда составляютъ кратную прогрессію. Діагональ равна $\sqrt{481}$ метра. Полная поверхность равна 888 кв. метрамъ. Опредѣлить измѣренія.

16. Разложить число 1729 на 6 частей такъ, чтобы отношеніе каждой части къ послѣдующей было равно истинному значенію дроби $\frac{2n^2+16n+30}{4n-n^2+21}$, которое она имѣетъ при $n=-3$.

17. Требуется узнать, какія числа, кратныя 9-ти, будучи раздѣлены на 21-й членъ разностной прогрессіи, даютъ въ остаткѣ 9-й членъ той же прогрессіи. когда извѣстно, что въ прогрессіи 33 положительныхъ члена, произведеніе крайнихъ членовъ равно 80, а разность прогрессіи есть корень уравненія $\frac{1}{x}+4=\sqrt{16+\sqrt{\frac{64}{x^2}+\frac{9}{x^4}}}$.

18. Число, превышающее положительный квадратный корень изъ него же на 272 единицы, требуется разложить на двѣ части, дѣлящихся нацѣло, одна на первый и другая на послѣдній членъ разностной прогрессіи, въ которой два смежныхъ члена, равноотстоящіе отъ крайнихъ, суть $11\frac{1}{5}$ и $11\frac{4}{5}$, а число членовъ равно большему изъ крайнихъ членовъ.

19. Между двумя числами a и b помѣщено 13 среднихъ ариѳметическихъ и 13 среднихъ геометрическихъ. Шестой членъ первой

группы вставленныхъ чиселъ равенъ седьмому члену второй. Найти отношеніе a къ b.

20. Число 456 расположено на три слагаемыхъ, которыя составляютъ кратную прогрессію. Если изъ третьяго слагаемаго вычесть первое, то разность будетъ равна числу членовъ такой разностной прогрессіи, которой первый членъ есть 0,01, третій 0,1 и сумма всѣхъ членовъ 322,5. Найти слагаемыя.

21. Второй и пятый члены возрастающей кратной прогрессіи соотвѣтственно равны корнямъ уравненія $x^2-105x+1944=0$. Сколько нужно взять членовъ, начиная съ перваго, чтобы ихъ сумма была равна наименьшему изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 29 даютъ въ остаткѣ 8, а при дѣленіи на 41 даютъ въ остаткѣ 6?

22. Седьмой и пятнадцатый члены убывающей разностной прогрессіи соотвѣтственно равны корнямъ уравненія $\lg_{10}(x-5)-\frac{1}{2}\lg_{10}(3x-20)=0{,}30103$. Сколько нужно взять членовъ, начиная съ перваго, чтобы ихъ сумма была равна наименьшему изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 25 даютъ въ остаткѣ 6, а при дѣленіи на 47 даютъ въ остаткѣ 43.

23. Сумма трехъ чиселъ равна положительному корню уравненія $\lg_{10}\sqrt{x+10}-0{,}47712=1-\frac{1}{2}\lg_{10}(x-1)$. Эти три числа составляютъ 1-й, 2-й и 5-й члены возрастающей разностной прогрессіи и вмѣстѣ съ тѣмъ соотвѣтственно 1-й, 2-й и 3-й члены кратной прогрессіи. Найти числа.

24. Найти наименьшее изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя при дѣленіи на 1-й, 2-й и 3-й члены возрастающей разностной прогрессіи даютъ въ остаткѣ соотвѣтственно 1-й, 2-й и 3-й члены возрастающей кратной прогрессіи. Извѣстно еще, что сумма трехъ первыхъ членовъ разностной прогрессіи равна 57 и, если изъ указанныхъ членовъ разностной прогрессіи вычесть соотвѣтственно упомянутые члены кратной прогрессіи, то получатся числа 9, 16 и 19.

25. Среднее ариѳметическое двухъ неизвѣстныхъ чиселъ равно истинному значенію дроби $\frac{2n^2+3n-35}{2n^2+18n+40}$ при $n=-5$; среднее геометрическое тѣхъ же чиселъ равно $10^{1-\lg 1,333\ldots}$. Найти эти числа.

26. Между числами a и b вставлено нѣсколько среднихъ ариѳметическихъ. Зная, что сумма этихъ среднихъ ариѳметическихъ относится къ суммѣ двухъ послѣднихъ изъ нихъ. какъ 7:2 и что a и b удовлетворяють уравненіямъ $2^a-3 . 2^{\frac{a-3}{2}}=26$ и $b-a=2^a$, опредѣлить число среднихъ ариѳметическихъ.

27. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе $ax+ny=c$, гдѣ a есть первый членъ безконечно-убывающей прогрессіи, въ которой знаменатель равенъ $(2,5)^{-1}$, а сумма равна 5: n есть число членовъ разностной прогрессіи, въ которой крайніе члены 1,125 и 8,875, а сумма равна 85; наконецъ c есть большій корень уравненія $z^2-74z-935=0$.

28. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе $ax+by=2c$, гдѣ коэффиціентъ a равенъ пятому члену безконечно-убывающей прогрессіи, которой первый членъ имѣетъ своимъ логариѳмомъ при основаніи $\sqrt[4]{15^3}$ число 5,33... и каждый членъ которой въ 6.5 разъ больше суммы всѣхъ слѣдующихъ за нимъ; b равенъ произведенію 12-ти среднихъ геометрическихъ, заключающихся между $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$; наконецъ c равенъ положительному корню уравненія $\lg(c+150)^2+\lg(c-150)^2=10$.

29. Нѣкто имѣлъ 2795 руб.. Деньги эти онъ раздѣлилъ на двѣ части; первая принесла столько процентовъ, сколько единицъ въ корнѣ уравненія $\frac{\sqrt{x+18}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+18}+\sqrt{x-3}}=(2.333....)^{-1}$; со второй части онъ получилъ проценты въ размѣрѣ, равномъ суммѣ безконечно-убывающей прогрессіи, которой всѣ члены положительны, первый членъ 2, а третій $\frac{98}{121}$. Всего онъ получилъ дохода 170 руб.. На какія части былъ раздѣленъ капиталъ?

30. Два работника, работая вмѣстѣ, могутъ окончить нѣкоторую работу въ число часовъ, равное суммѣ членовъ безконечно-убывающей прогрессіи, въ которой всѣ члены положительны, сумма первыхъ трехъ членовъ равна 1,39. а логариѳмъ третьяго члена равенъ $2(\lg 3-1)$. Одинъ первый работникъ могъ бы окончить всю работу скорѣе, чѣмъ одинъ второй, на 3 часа. Во сколько времени каждый работникъ отдѣльно можетъ исполнить работу?

31. Капиталъ въ 1540 руб. находился въ оборотѣ по сложнымъ процентамъ и превратился въ 6536 руб. 40 коп. черезъ столько лѣтъ, сколько единицъ въ цѣломъ и положительномъ корнѣ уравненія $73(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})=9(x+x^{-1})$. Поскольку процентовъ капиталъ былъ пущенъ въ оборотъ?

32. Нѣкто помѣстилъ въ сберегательную кассу 12000 руб. по 3,5 сложныхъ процента, при чемъ процентныя деньги причислялись къ капиталу по прошествіи каждаго года. Сберегательная касса въ свою очередь пускаетъ въ оборотъ помѣщенныя деньги по 6 сложныхъ процентовъ, при чемъ прибыль причисляется къ капиталу въ концѣ каждаго полугодія. Вычислить доходъ кассы за 12 лѣтъ.

33. Девятый и одиннадцатый члены убывающей разностной прогрессіи удовлетворяютъ уравненію $\frac{1}{2}\lg 2+\lg\sqrt{x^2+4x+5}=\frac{1}{2}[\lg(x^2-4x+5)+1]$. Сумма всѣхъ членовъ, начиная съ перваго, равна $10^{1-\lg 0,08(3)}$. Опредѣлить число членовъ.

34. Общій n-й членъ разностной прогрессіи имѣетъ форму $7n-6$. Сумма s всѣхъ членовъ прогрессіи удовлетворяетъ уравненію $\lg(s-4)-\lg(\frac{s}{17}+8)=\lg(s-104)-1$. Опредѣлить число членовъ.

35. Занята сумма 23400 рублей съ условіемъ погашать долгъ, внося въ концѣ каждаго года по 4044 руб.. Если бы было занято 40030 рублей по столько же сложныхъ процентовъ, то погашеніе этого долга тѣми же ежегодными взносами продолжалось бы двойное число лѣтъ. На сколько лѣтъ и поскольку процентовъ занята вышеуказанная сумма?

36. Нѣкто занялъ неизвѣстную сумму денегъ по 3,5% съ условіемъ заплатить ее черезъ годъ вмѣстѣ съ годовыми процентными деньгами. Получивъ эту сумму, онъ тотчасъ же внесъ ее въ банкъ, платящій въ годъ 5% и причитающій процентныя деньги къ капиталу черезъ каждые 3 мѣсяца. Вычислить капиталъ, зная, что лицо, сдѣлавшее съ нимъ оборотъ, черезъ годъ покрыло свой долгъ и получило еще 441 р. чистой прибыли.

37. При перемноженіи двухъ чиселъ a и b, связанныхъ уравненіемъ $\lg a-\lg b+4\lg 2=\lg(a-b)-\lg 3$, была сдѣлана ошибка въ томъ, что при сложеніи частныхъ произведеній написано на мѣстѣ тысячъ

число, на единицу меньшее истиннаго. Вслѣдствіе этого при дѣленіи ошибочнаго произведенія на меньшаго производителя, получается въ частномъ число, на 12 меньшее большаго производителя, а въ остаткѣ число, составляющее $\frac{1}{14}$ отъ разности производителей. Найти перемножаемыя числа.

38. Бассейнъ наполняется тремя трубами въ a часовъ. Первая труба, дѣйствуя отдѣльно, можетъ наполнить его въ 0,8(3) времени, въ которое наполняетъ его одна вторая труба, а третья труба можетъ наполнить бассейнъ во время, на b часовъ большее, чѣмъ первая. Зная, что числа a и b связаны уравненіями $\lg a - 2\lg 2 = 2\lg 3 - \lg(b+4)$ и $\sqrt{\frac{a+b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{a+b}} = 2,1(6)$, опредѣлить, во сколько часовъ каждая труба, дѣйствуя отдѣльно, наполняетъ бассейнъ.

39. Работникъ въ началѣ каждой недѣли вноситъ въ ссудо-сберегательную кассу по 3 рубля. Касса платитъ 4% и причисляетъ процентныя деньги къ капиталу по истеченіи каждаго полугодія. Черезъ сколько лѣтъ работникъ накопитъ сумму въ 1469 рублей?

40. Нѣкто положилъ въ банкъ на 5 сложныхъ процентовъ капиталъ, число рублей котораго равно положительному корню уравненія $\sqrt[3]{x+96} - \sqrt[3]{x-200} = 2$. Въ концѣ каждаго нечетнаго года онъ бралъ изъ банка по a рублей, а въ концѣ каждаго четнаго года вносилъ снова по a рублей. По истеченіи 20 лѣтъ у него составился вмѣстѣ съ послѣднимъ взносомъ капиталъ въ 768 руб. 30 коп.. Найти сумму a.

---

41. Числа сторонъ трехъ правильныхъ многоугольниковъ составляютъ кратную прогрессію и даютъ въ суммѣ 37. Если въ каждомъ многоугольникѣ будутъ проведены всѣ діагонали, то число ихъ въ общей сложности будетъ 185. Опредѣлить число сторонъ каждаго многоугольника.

42. Опредѣлить число сочетаній изъ $n+3$ элементовъ по $k+1$ въ каждомъ сочетаніи для того частнаго случая, когда n и k удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ $nk(n-k)=30$ и $n^3-k^3=117$.

43. Найти предѣлы, между которыми заключается дробь $\frac{3x^2-5x+6}{2x^2+3x+5}$ при всевозможныхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x.

44. Найти въ разложеніи бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ членъ, содержащій x^3, зная, что показатель n равенъ наименьшей величинѣ, которую можетъ имѣть выраженіе $y+\frac{64}{y}$ при дѣйствительныхъ значеніяхъ y

45. Если неизвѣстное число выразить по 13-ричной системѣ счисленія, то оно выразится тремя цифрами, изъ которыхъ средняя будетъ 0. Если то же число выразить по 11-ричной системѣ, то оно выразится тѣми же цифрами, только написанными въ обратномъ порядкѣ. Найти это число.

46. Зная, что $x-7$ есть общій наибольшій дѣлитель трехчленовъ x^2+mx+n и x^2+px+q, составить наименьшее кратное тѣхъ же трехчленовъ при произвольныхъ значеніяхъ m и p и найти его частное выраженіе при $m=-5$ и $p=-3$.

47. Разложивъ 8 въ сумму двухъ дѣйствительныхъ количествъ и принявъ полуразность этихъ количествъ за вспомогательное неизвѣстное, опредѣлить разложеніе такъ, чтобы сумма пятыхъ степеней отъ слагаемыхъ количествъ была бы наименьшая и узнать, какова эта сумма.

48. Дробь $\frac{12x^3+2x^2+10x+1}{6x^2+x+2}$ разложена въ непрерывную и составлены всѣ ея подходящія дроби. Число, равное числителю предпослѣдней подходящей дроби при $x=5$, требуется разложить на такія двѣ части, чтобы первая дѣлилась нацѣло на 37, а вторая при дѣленіи на 49 давала бы въ остаткѣ 14.

49. Неизвѣстное число, кратное 11-ти, по девятиричной системѣ выражается четырьмя цифрами, изъ которыхъ двѣ лѣвыя суть каждая 3, а третья съ лѣвой стороны представляетъ число на 3 меньшее числа, обозначаемаго послѣдней цифрой. Опредѣлить такое основаніе другой системы счисленія, при которомъ то же неизвѣстное число выразится въ видѣ (10103).

50. Если отношеніе акра къ десятинѣ, которое меньше единицы, обратимъ въ непрерывную дробь и составимъ всѣ подходящія дроби, то найдемъ, что число всѣхъ дробей будетъ четное и что знаменатель x послѣдней и знаменатель y предпослѣдней удовлетворяютъ совокупности уравненій $x=37y-19$ и $2^{\left(y-\frac{x}{98}\right)^2-16\left(y-\frac{x}{98}\right)-15{,}5}=2\sqrt{2}$. Сколько кв. саженъ и кв. футовъ содержитъ акръ?

51. Число, равное суммѣ раціональныхъ членовъ разложенія $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^6$, раздѣлить на двѣ такія части, чтобы одна дѣлилась безъ остатка на первый, а другая на второй членъ возрастающей разностной прогрессіи, у которой сумма десяти членовъ равна 255, а произведеніе перваго члена на десятый равно 144.

52. Раздѣлить $\sqrt[3]{7414875}$ на 3 части, образующія непрерывную кратную пропорцію, которой первый членъ превышаетъ послѣдній на число, равное коэффиціенту того члена разложенія $\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\sqrt[7]{x^5}\right)^{10}$, который послѣ упрощенія содержитъ первую степень буквы x.

53. Найти разностную прогрессію изъ четырехъ чиселъ, въ которой произведеніе перваго члена на четвертый равно большему корню уравненія $x^{1+\lg x}=0{,}001^{-\frac{2}{3}}$, а сумма квадратовъ второго и третьяго членовъ равна второй степени предѣла безконечной періодической дроби (8,16,16,16,....).

54. Найти кратную прогрессію изъ трехъ чиселъ, въ которой сумма членовъ равна корню уравненія $\frac{3x+2}{5}:\left(1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}\right)=\frac{x}{19}+20$, а произведеніе тѣхъ же членовъ равно четырехзначному цѣлому числу, обладающему тѣмъ свойствомъ, что если въ немъ цифру 2, стоящую на мѣстѣ единицъ, зачеркнуть и поставить ее же впереди остальныхъ цифръ, то получится число, меньшее искомаго на 3249.

55. Выразить непрерывной дробью $\sqrt{m+\frac{1}{25}n}$, гдѣ m есть коэффиціентъ при x^3 въ наименьшемъ кратномъ многочленовъ $x^3+6x^2+11x+6$ и $x^3+9x^2+26x+24$, а n есть коэффиціентъ того члена разложенія $(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z^{-1}})^{26}$, который послѣ упрощенія содержитъ z въ седьмой степени.

56. Выразить непрерывной дробью $\sqrt{a-b-c}$, гдѣ a равно коэффиціенту при x^7 разложенія $(\sqrt[7]{x^5}+x\ {}^{1}\sqrt{x^{-1}})^{16}$, b равно наименьшему цѣлому числу, которое при дѣленіи на 23 и 15 даетъ

соотвѣтственно остатки 14 и 8, а c равно предѣлу суммы безконечно убывающей прогрессіи $\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\cdots$

57. Рѣшить неопредѣленное уравненіе $ax+by=c$, въ которомъ $a=\sqrt[3]{32768}$, b равно третьему члену кратной прогрессіи, въ которой всѣ члены положительны, второй членъ больше перваго на $3\frac{1}{3}$, а разность между четвертымъ и первымъ есть $43\frac{1}{3}$, и наконецъ c равенъ коэффиціенту того члена разложенія $(z\sqrt{z}+2\sqrt[3]{\frac{1}{z}})^7$, который содержитъ пятую степень буквы z.

58. Два каменщика сложили стѣну, работая одинъ послѣ другого каждый по нѣсколько полныхъ дней. Первый каменщикъ, работая отдѣльно, могъ бы сложить эту стѣну въ такое число дней, которое равно общему положительному корню двухъ уравненій $x^4-47x^3+89x^2+47x-90=0$ и $x^4-43x^3-88x^2-89x-45=0$. Второй каменщикъ, работая отдѣльно, могъ бы сложить ту же стѣну въ такое число дней, которое равно нѣкоторому члену разложенія $(\sqrt[3]{u^2}+u^{-0,888\ldots})^7$, совсѣмъ не зависящему отъ u. Сколько дней работалъ каждый каменщикъ?

59. Третій членъ разностной прогрессіи равенъ двузначному числу, въ которомъ число простыхъ единицъ пятью больше числа десятковъ и которое выразится черезъ (36), если за основаніе системы счисленія возьмемъ упомянутое число простыхъ единицъ. Десятый членъ прогрессіи равенъ наименьшему цѣлому числу, которое при дѣленіи на 8 и 11 даетъ соотвѣтственно остатки 3 и 6. Сколько членовъ прогрессіи, начиная съ перваго, нужно взять, чтобы ихъ сумма была равна четвертому члену разложенія бинома $(1+\sqrt[3]{3,4})^{11}$.

60. Найти сумму всѣхъ трехзначныхъ чиселъ, которыя при дѣленіи на a, даютъ въ остаткѣ b, а при дѣленіи на c въ остаткѣ нуль, зная, что a равно коэффиціенту того члена разложенія $(\sqrt[3]{u^2}+u^{\quad 10})^{16}$, который совсѣмъ не зависитъ отъ u, b равно коэффиціенту при x^2 въ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ многочленовъ $12x^3+10x^2-8x+6$ и $3x^4-2x^3-5x^2+4x-2$ и наконецъ c равно квадрату предѣла періодической непрерывной дроби (3,3,6,3,6,....).

ОТВѢТЫ.

ОТДѢЛЕНІЕ VII.

§ 4. **151.** $a=\sqrt{b}$. **152.** $p^2=2aq$. **153.** $m=12$. **154.** $m=-12$, $n=9$. **158.** $\frac{3}{4}ab^2-\frac{2}{5}a^2$. **160.** $\frac{a^m}{2b^3}+0{,}3a^nb^3$. **161.** $2a^2-a+1$. **163.** $3a^2-ab+4b^2$. **164.** $\frac{1}{2}a^2-2ab+\frac{1}{3}b^2$. **165.** $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}-a$. **166.** $\frac{2}{3a^2}+\frac{3}{5a}-\frac{4a}{3}$. **167.** x^3-2x^2-3x+5. **168.** $(x-y)^3$. **169.** $3a^3-2a^2b-7ab^2+4b^3$. **170.** $x^2-2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}$. **171.** $m=60$, $n=-8$. **172.** $m=3a^2$, $n=a^3$. **173.** $3b=a^2$, $27c=a^3$. **174.** Среднее изъ взятыхъ чиселъ. **175.** $4x-3y$. **177.** x^2+x+1. **178.** $4-3ab-2a^2b^2$. **179.** $a^{10}-3a^5+2$. **180.** x^3-x^2+x-1.

§ 5. **181.** 24. **182.** 19. **183.** 43. **184.** 780. **185.** 37. **186.** 5300. **187.** 68. **188.** 97000. **189.** 8100. **190.** 98000. **191.** 234. **192.** 237. **193.** 912. **194.** 509. **195.** 876. **196.** 681. **197.** 135. **198.** 852. **199.** 4750. **200.** 30700. **201.** 2136. **202.** 3156. **203.** 1007. **204.** 2012. **205.** 7009. **206.** 7505. **207.** 8526. **208.** 9482. **209.** 4444. **210.** 6109. **211.** 35028. **212.** 53214. **213.** 701407. **214.** 1012034. **215.** $\frac{7}{9}$. **216.** $\frac{5}{3}$. **217.** $\frac{16}{53}$. **218.** $\frac{7}{44}$. **219.** $23\frac{1}{2}$. **220.** $104\frac{2}{3}$. **221.** 0,7. **222.** $\frac{17}{69}$. **223.** 0,58. **224.** 0,063. **225.** 0,816. **226.** 0,0074. **227.** 2,81. **228.** 9,12. **229.** 0,00508. **230.** 6,403.

§ 3. **261.** 17. **262.** 32. **263.** 28. **264.** 42. **265.** 51. **266.** 82. **267.** 91 **268.** 96. **269.** 54. **270.** 440. **271.** 154. **272.** 314. **273.** 206. **274.** 306 **275.** 814. **276.** 519. **277.** 854. **278.** 947. **279.** 5123. **280.** 2514 **281.** $\frac{3}{5}$. **282.** $\frac{7}{9}$. **283.** $2\frac{1}{2}$. **284.** 0,09. **285.** $1\frac{2}{13}$. **286.** $4\frac{1}{6}$. **287.** 0,16 **288.** 4,1. **289.** 0,018. **290.** 0,0313.

ОТДѢЛЕНІЕ VIII.

§ 5. **105.** $-\sqrt{2}$. **106.** $129\sqrt{5}$. **107.** $22\sqrt[3]{5}$. **108.** $-1\frac{2}{3}\sqrt{5}-4\frac{1}{3}\sqrt{2}$. **109.** $7\sqrt{6}+2\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}-\sqrt{11}$. **110.** $10\frac{1}{2}\sqrt{2}-1\frac{1}{3}\sqrt{3}$. **113.** $7ab\sqrt{5a}$. **114.** $-4a^2c\sqrt{3d}$. **115.** $2y\sqrt[3]{x^2y^2}$. **116.** $-2n\sqrt{m-n}$. **117.** $-2\frac{1}{2}\sqrt{4-2x}$. **118.** 0. **119.** $\frac{2x^2-x}{2}\sqrt[4]{x-1}$. **120.** $x^2\sqrt[3]{x^3-y^3}$.

§ 6. **127.** $448+5\frac{1}{3}\sqrt{6}$. **128.** 68. **129.** $-33\sqrt{5}$. **131.** 84. **132.** $-\sqrt{2}$ **140.** $-ab^5\sqrt[3]{25}$. **142.** $\frac{a}{x}\sqrt[3]{ax^2}+x\sqrt[6]{a^3x^4}$ $\frac{x}{a}\sqrt[6]{ax}$. **144.** $a\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{a}$. **148.** $3\sqrt[6]{1152}$. **149.** $3\sqrt[4]{200}-2\sqrt[12]{2048}+6\sqrt[12]{5000}$. **151.** $6-10\sqrt[6]{72}-8\sqrt[3]{9}$. **152.** $11\sqrt[3]{4}-15\sqrt[6]{2}$. **156.** $6ab\sqrt[12]{a^{11}b^{10}}$. **157.** $a^3\sqrt[6]{ab^3}-2a^2b\sqrt{a}-a^3b\sqrt[6]{a^3b^2}$. **158.** $2a^3-2a^2\sqrt[15]{a}-2a\sqrt[6]{a}$. **159.** $(a^2-2b)\sqrt{b}-ab$. **160.** $a+a\sqrt[4]{a}-a\sqrt[12]{a}-\sqrt[12]{a^{11}}$. **165.** $3\frac{1}{3}-2\sqrt[3]{20}+10\sqrt[3]{4}$. **166.** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$. **172.** $\sqrt{a}-\sqrt[4]{a^2x}-\frac{4a}{x}\sqrt[4]{x^3}$. **174.** $\frac{y}{5x}\sqrt[5]{x}+\frac{3}{40xy}\sqrt[5]{x^2y^2}-\frac{5}{4x}\sqrt[5]{x^3y}$. **175.** $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. **176.** $\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{2b^2}$. **177.** $\sqrt{2a}+\sqrt[4]{6ab^2}+b\sqrt{3}$. **178.** $a\sqrt{a}-\sqrt[4]{2a^3b^3}+b\sqrt{2b}$. **179.** $x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}$. **180.** $\frac{1}{y}\sqrt[5]{xy}-\sqrt[5]{2x^3y^3}+\frac{1}{2x}\sqrt[5]{8x^4y^4}$. **193.** $\frac{3}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}$. **194.** $\frac{a(x^2-y^2)}{2a^2}\sqrt[3]{4a^2(x+y)^2}$. **195.** $ab^2\sqrt{2a}-ab\sqrt[12]{8a^8b^7}+a^2b^2$. **196.** $\frac{b^2}{a}\sqrt[36]{a^{17}b^{10}}-4a^2b^3\sqrt[3]{a^2b}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt[12]{a^5b^4}$. **197.** $\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt{3}.\sqrt[5]{2x}+3$. **198.** $2\sqrt[3]{a^2x}+\sqrt{ax}$. **199.** $x\sqrt{3xy}-x\sqrt[4]{12xy^3}+2xy$. **200.** $\frac{x}{y^2}\sqrt{xy}-x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$.

§ 7. **211.** $5-2\sqrt{6}$. **212.** $8\frac{1}{4}+2\sqrt{2}$. **213.** $2+2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[6]{2}$. **214.** $3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt[6]{432}-16$. **215.** $11-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$. **216.** $48-12\sqrt{10}-12\sqrt{5}+20\sqrt{2}$. **217.** 10. **218.** 8. **219.** $\frac{ab^3}{16}+\frac{4}{a}-b\sqrt{b}$. **220.** $a^4\sqrt{a}(7+5\sqrt{2})$. **231.** $\sqrt[24]{2^8 3^3 x^{11} y^7}$. **232.** $\frac{3x^2y}{4}\sqrt[8]{x}$. **233.** 12. **234.** 3. **235.** 2. **236.** 4. **237.** $a+1$. **238.** $2a-\frac{3b}{2}$. **239.** $x+y$. **240.** $2x^2-\frac{1}{2}$.

§ 8. **243.** $\sqrt[3]{a}$. **246.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{36}$. **247.** $3\sqrt[4]{2}$. **248.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$. **249.** $(a+b)\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **250.** $\frac{1}{a+b}\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}$. **251.** $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$. **252.** $\frac{a(1+\sqrt{a})}{1-a}$. **255.** $\sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})}$. **256.** $\frac{n(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}$. **258.** $\frac{1}{[illegible]}(\sqrt{[illegible]}+\sqrt{6}+\sqrt{[illegible]})$. **259.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **260.** $n\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}(3-2\sqrt{[illegible]})(2-\sqrt[3]{72}+\sqrt[3]{9})$.

§ 9. **263.** $\frac{1}{2}(\sqrt{14}-\sqrt{6})$. **266.** $\sqrt[4]{45}-\sqrt[4]{5}$. **267.** $\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{2})$. **268.** $3+\sqrt{2}$. **269.** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **270.** $\sqrt{a^2+b}+\sqrt{a^2-b}$. **271.** $2\sqrt{a}-\sqrt{5b}$. **273.** $5-\sqrt[4]{3}$. **274.** $2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$. **275.** $a+\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{3}$. **276.** $2\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[3]{y}-y^2$. **277.** $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$. **278.** $\sqrt{2x}-\sqrt[3]{y^2}$. **279.** $\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}+2b\sqrt[4]{a}$. **280.** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}-\frac{2\sqrt[3]{y}}{3x}$.

§ 10. **281.** $\sqrt{a}(\sqrt{b}+1)$. **283.** $\sqrt{a+b}(1-\sqrt{a-b})$. **285.** $(a+\sqrt[3]{b})(a-\sqrt[3]{b})$. **287.** $\sqrt[4]{a^3}(\sqrt[12]{a}+1)$. **288.** $\sqrt{a}(a\sqrt{a}+1-\sqrt[4]{a})$. **289.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$. **290.** $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2})^2$. **291.** $(a+\sqrt[5]{b^2})(\sqrt{a}+\sqrt[5]{b})(\sqrt{a}-\sqrt[5]{b})$. **292.** $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b})$. **293.** $(a-\sqrt[5]{b})(a^2+a\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{b^2})$. **294.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)$. **295.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ или $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$ и т. п.. **296.** $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b})(a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$. **299.** $\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$. **300.** $\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})^2$. **301.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **302.** 1. **303.** $\sqrt{a^2-b^2}$. **304.** $\sqrt{1-x}$. **305.** $x+\sqrt{x^2-a^2}$. **306.** $\frac{4a}{x^2}\sqrt{a^2-x^2}$. **307.** $\frac{1}{x}\sqrt{2ax}$. **308.** $a\sqrt{2}$.

309. $2\sqrt[3]{(3-\sqrt[4]{5})^2(3+\sqrt[4]{5})}$. **310.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$. **311.** $2a\sqrt[8]{a^7}$. **312.** $11a\sqrt{ax}$. **313.** $\frac{b^6}{a^{10}}\sqrt[5]{a^2b^2}$. **314.** $-\sqrt[2n]{b^{n-2m}}$. **315.** $\frac{a^2}{2x^2}\sqrt[4]{ax^3}$. **316.** $\sqrt[3]{\frac{2a}{1+a}}$. **317.** 2. **318.** $\sqrt{3}+1$. **319.** 1. **320.** $a+b$.

§ … **334.** 4. **335.** $1\frac{1}{5}$. **336.** $\frac{4}{9}$. **339.** 5. **340.** —52. **343.** $a+b+\sqrt{ab}$. **345.** $\sqrt[9]{a^4}+\frac{\sqrt[9]{a^2}}{\sqrt[12]{b^5}}+\frac{1}{\sqrt[6]{b^5}}$. **346.** $a^n-\sqrt{\frac{a^n}{b^n}}+\frac{1}{b^n}$. **347.** $\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}$. **348.** $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}$. **349.** $a^3+b\sqrt[3]{a}+b^3-2a\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}+2ab\sqrt{ab}-2b^2\sqrt[6]{a}$. **351.** $\frac{b^6}{a^4}$. **352.** $\frac{b^4}{a^3}\sqrt{\frac{3\sqrt[4]{2b}\sqrt[4]{b}}{\sqrt[24]{a^7}}}$. **353.** $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **354.** $\frac{\sqrt{a^3}}{b}-3\sqrt[3]{b^2}$. **355.** $\frac{1}{a^2b^2\sqrt{a}\sqrt[4]{b}}$. **356.** $2\sqrt[4]{2}.a^4b^2\sqrt[6]{a}.\sqrt[4]{b^3}$. **357.** $ab^3+\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{b^3}+2\sqrt[6]{a^5b}$. **358.** $a^2-3a.\sqrt{a}\sqrt[3]{a}+3a\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt{a}$. **359.** ab. **360.** $(\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}-2\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b})^2$.

§ …2. **383.** $4+17i$. **384.** $5a-2bi$. **385.** —12. **389.** $1-46i$. **390.** $100-13\sqrt{7}.i$. **391.** $a+3b+2\sqrt{ab}.i$. **393.** $-\sqrt{a}.i$. **395.** $a+bi$. **397.** $1-\sqrt{3}.i$. **399.** $3-5\sqrt{2}.i$. **401.** a^2-b^2+2abi. **403.** $\frac{-1+\sqrt{3}.i}{2}$. **405.** $-14-12\sqrt{2}.i$. **407.** $a^3-3ab^2-(3a^2b-b^3)i$. **409.** $(26-15\sqrt{3})i$. **411.** $2+i$. **412.** $1-2i$. **413.** $2+\sqrt{3}.i$. **414.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i$. **415.** $\sqrt{22}-\sqrt{2}.i$. **416.** $\frac{1}{2}(\sqrt{26}+\sqrt{2}.i)$. **417.** $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. **418.** $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1}.i)$

ОТДѢЛЕНІЕ IX.

§ … **9.** 0; $\sqrt{3}$. **10.** 0; $-\frac{1}{2}\sqrt{10}$. **15.** $\pm2\sqrt{6}$. **16.** $\pm2.i$. **17.** ±8 **18.** $\pm\frac{1}{5}\sqrt{6}$. **19.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$. **20.** $\pm\sqrt{11}$. **29.** $1\pm3i$. **30.** $3\pm5i$. **31.** 4; —1 **32.** 6; 4. **33.** $1\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **34.** $1\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **35.** 3; $\frac{1}{2}$. **36.** $\frac{3}{4}$; —1. **37.** $4\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **38.** $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{6}$. **39.** $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **40.** $\frac{-3\pm3\sqrt{3}.i}{2}$. **41.** —6; 4.

42. 2; 3. **43.** 24; 4. **44.** 9; 4. **45.** $1\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}$. **46.** 5; $1\frac{1}{2}$. **47** 12; 11 **48**. 2. **49.** 5; $2\frac{1}{12}$. **50.** $\frac{2}{3}; -\frac{13}{21}$. **51.** 18; 15,8. **52.** 30; 305. **53.** 2; —1 **54.** 1; $-1\frac{1}{4}$. **55.** 13; $\frac{1}{2}$. **56.** 5; $1\frac{1}{5}$. **57.** 5; —4. **58.** 4. **59.** 2; $-\frac{7}{9}$. **60.** 10; 8.

§ 2. **61.** 0; $2a$. **62.** $\pm\sqrt{ab}$. **63.** 0; $-\frac{a}{2}$. **64.** 0; $-\frac{3a}{2}$. **65.** $\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **66.** $\pm\frac{a+1}{a}$. **67.** $\pm\frac{\sqrt{c}}{a+b}$. **68**. $\pm 5a$. **69** $\pm\sqrt{4a^2+b^2}$ **70.** $\pm a$. **71.** $3a$; a. **72.** $-7a^3$; $5a^3$. **73.** $a\pm b$. **74.** $a-3b$; $3b-a$. **75.** $2a; -\frac{a}{2}$. **76.** $-\frac{a}{3}; -\frac{a}{2}$. **77.** $-\frac{3a}{b}; \frac{a}{3b}$. **78.** $\frac{5a}{4b}; -\frac{4a}{5b}$. **79** $\frac{m}{n}; \frac{n}{n}$. **80.** $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}$. **81.** $\frac{a}{b}$; —1. **82.** $\frac{a}{a+b}; \frac{b}{a\ \ b}$. **83.** $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}$. **84.** $\frac{2}{3}a; \frac{\ }{7}a$ **85.** $\frac{3a-b\pm\sqrt{9a^2+b^2\ \ 10ab}}{2}$. **86.** $a\pm 2b$. **87.** $\frac{a}{2}(3\pm\sqrt{3})$. **88.** $\frac{a}{2}; \frac{\ }{6}$ **89.** $-a$; $-b$. **90.** 1. **91.** $\frac{ab}{a+b}$. **92.** $\frac{2c}{a+b}; -\frac{c}{a+b}$. **93.** a; b. **94.** a, b. **95.** $\frac{a+b}{2(a-b)^2}(a^2+b^2\pm\sqrt{a^4\ \ 4a^3b+10a^2b^2-4ab^3+b^4})$. **96.** $\frac{1}{3}(a+b+c)\pm$ $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}$. **97.** $\frac{a+\sqrt{a^2+4b(c-a)}}{2}$. **98.** $\frac{5a+3b}{8}; \frac{3a+5b}{8}$. **99.** $-a$; $\frac{a(c+1)}{c(2c+3)}$. **100.** $\frac{ab+ac+bc\pm\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2}}{a+b+c}$.

§ 3. **151.** $qx^2+px+1=0$. **152.** $x^2+mpx+m^2q=0$. **153.** $4x^2+4q-p^2=0$. **155.** p^2-2q. **156.** $p(3q-p^2)$. **157.** 34; 98. **158.** $4\frac{1}{9}; -8\frac{1}{27}$. **159.** 3; 5. **160.** 3 и 15 или —15 и —3. **161.** 10. **165.** —16 **166.** $a=3b$ или $b=3a$.

§ 4. **171.** 5; 12. **172.** 10; 11; 12. **173.** 15; 25. **174.** 12. **175.** 24 **176.** 7. **177.** 3; 4; 5. **178.** 9. **179.** 5. **180.** 10. **181.** 30. **182.** 2000 или 500. **183.** Невозможенъ. **184.** Перваго сорта 39 или 12. **185.** 7 **186.** 5. **187.** 24 и 18. **188.** 40 и 60. **189.** 10. **190.** 3 и 4. **191.** Окруж.

задн. 3 ф. или $1\frac{1}{2}$ ф.. **192.** 390 или 150. **193.** 60. **194.** 12; 15. **195.** 30. **196.** 8 и 7. **197.** 2400. **198.** 120 и 80. **199.** 10. **200.** 2 и 3.

§ **5**. **231.** -1; $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **232.** 2; $-1\pm\sqrt{3}.i$. **233.** -3; $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}.i)$. **234.** a; $\frac{a}{2}(-1\pm\sqrt{3}.i)$. **235.** $\pm2;\pm2i$. **236.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$. **237.** ±2; $1\pm\sqrt{3}.i$; $-1\pm\sqrt{3}.i$. **238.** $\pm3i$; $\pm3\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}}$. **239.** $\pm\frac{a}{b}$; $\pm\frac{a}{b}i$; $\frac{a\sqrt{2}}{2b}(1\pm i)$; $\frac{a\sqrt{2}}{2b}(-1\pm i)$. **240.** $\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}}$; $\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}}$.

§ **6**. **241.** 2. **242.** 20. **243.** -1. **244.** 7. **245.** 6. **246.** 7. **247.** 4. **248.** 4. **249.** 0; 2. **250.** 0; $2\frac{1}{2}$. **251.** 2. **252.** 2. **253.** ±2. **254.** 3; $-\frac{2}{3}$. **255.** 81. **256.** 5. **257.** 2; $2\frac{1}{2}$. **258.** 4; $-\frac{10}{27}$. **259.** 0; $\frac{25}{16}$. **260.** $-\frac{2}{3}$. **261.** $\frac{a}{4}$. **262.** 0; a. **263.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+2b^2}$. **264.** $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$. **265.** $-\frac{2a}{3}$. **266.** $\frac{3a^2}{4}$. **267.** $2a$. **268.** 0; $\pm a$. **269.** $\frac{1\pm\sqrt{1+4b^2}}{2a}$. **270.** $\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{4}\sqrt{2}$.

ОТДѢЛЕНІЕ X.

§ **1**. **1.** 2; -1. **2.** 1; 2; -3. **3.** -1; ±1. **4.** ±1; 5. **5.** -3; $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **6.** -6; $-1\pm\sqrt{2}.i$. **7.** 1; -2; $\pm\sqrt{2}.i$. **8.** 1; -2; 3; -4. **9.** 2; -3; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **10.** -1; -3; ±5. **11.** ±2; ±1. **12.** $\pm2i$; $\pm2\sqrt{2}.i$. **13.** $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\pm i$. **14.** $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.i$. **15.** 2; -1; $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **16.** 1; -4; $\frac{-3\pm\sqrt{15}.i}{2}$. **17.** 1; $-\frac{27}{8}$. **18.** 84; 19. **19.** $\pm3\sqrt{2}$. **20.** 0; -5. **21.** 2; $\frac{1}{2}$; -3; $-\frac{1}{3}$. **22.** 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. **23.** $4\pm\sqrt{17}$; $\frac{1}{8}(1\pm\sqrt{65})$. **24.** 2; $-\frac{1}{2}$; -3; $-\frac{1}{3}$. **25.** 2; $\frac{1}{2}$; ±1. **26.** $\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$; $\pm i$. **27.** -1; 2; $\frac{1}{2}$; $-2\pm\sqrt{3}$. **28.** 1;

$-\frac{5}{3}; -\frac{3}{5}; \frac{-1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **29.** $2\pm\sqrt{3};\ 3\pm2\sqrt{2};\ \pm i$. **30.** $\pm1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ -1$.

31. $3; \frac{-3(1\pm\sqrt{3}.i)}{2}$. **32.** $-\frac{2}{5}; \frac{1\pm\sqrt{3}.i}{5}$. **33.** $\pm2; \pm2i$; **34.** $\frac{1\pm i}{3}$; $\frac{1+\ }{3}$. **35.** $\sqrt[5]{2}, \frac{\sqrt[5]{2}}{4}(\sqrt{5}-1\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}.i); \frac{\sqrt[5]{2}}{4}(-\sqrt{5}-1\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}.i)$.

36 $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}i; \pm\sqrt[6]{\frac{3}{2}}.\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}}$ **37.** $1; \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}; \sqrt[3]{2}; \frac{-1\pm\sqrt{3}.i}{\sqrt[3]{4}}$.

38. $3; \pm\sqrt{3}.i; \sqrt[3]{2}+1; \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1\pm\sqrt{3}.i)+1$. **39.** $32; 16(-1\pm\sqrt{3}.i), 1; \frac{-1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **40.** $241; \frac{243}{2}(-1\pm\sqrt{3}.i)-2; -31, 14\pm16\sqrt{3}.i$.

§ 2*). **41.** 6; $7\frac{1}{3}$. **42.** ±3. **43.** 1; 19. **44.** 3; 4. **45.** ±3; ±12 **46.** 0; 2, $\pm\sqrt{2}$. **47.** 3; 2. **48.** ±3; $\pm\frac{8}{3}\sqrt{3}$. **49.** ±3, ± [illegible]. **50.** 4; 2; [illegible] **51.** 7; 5. **52.** ±3. **53.** 7; 5. **54.** 6. **55.** ±20. **56.** 2. **57.** ±3; ±4 **58.** 7; —6. **59.** 8; 2. **60.** 4; 64. **61.** ±3; $\pm\sqrt{2}.i$. **62.** 4; 3. **63.** ±3 $\pm i$. **64.** 8; 4. **65.** ±3; $\pm\frac{3}{2}$. **66.** ±2; $\pm i$. **67** 3; —2. **68.** $\pm3\sqrt{2}$ **69.** 9; —4. **70.** 4; 9; $4\pm\sqrt{15}$. **71.** 0; $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{3}.i)$. **72.** 0, 1, 1.

73. 3; 2; $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{151}.i)$. **74.** 2; 1; $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{19}.i)$. **75.** 3; 1; $2(1\pm\sqrt{\frac{19}{7}})$.

76. 2; $\frac{1}{3}$; $\frac{1\pm\sqrt{41}}{10}$. **77.** 4; 2. **78.** 6; —3, $\frac{12\pm3\sqrt{39}}{23}$. **79.** ±5. **80.** 333; 115. **81.** $x=\pm3$, $y=\pm4$; $z=\pm2$. **82.** $x=\pm8$; $y=\pm6$; $z=\pm9$ **83.** $x=\pm1$; $y=\pm4$; $z=\pm6$. **84.** $x=9, -1$; $y=3, -5$; $z=0,\ 8$ **85.** $x=\pm5$; $y=\pm2$; $z=\pm7$. **86.** $x=13, 2$; $y=5$; $z=2, 13$. **87.** $x=4, 3$, $\frac{5\pm\sqrt{23}.i}{2}$; $y=3, 4, \frac{5\mp\sqrt{23}.i}{2}$; $z=5, 5, 7$. **88.** $x=2, 2$; $y=4, 1$; $z=1, 4$

89 $x=5, 12$; $y=12, 5$; $z=13$. **90.** $x=1, \frac{7\pm\sqrt{15}.i}{2}$; $y=1, -4$; $z=-1$, $\frac{7\mp\sqrt{15}.i}{2}$. **91.** $x=4, 4, 9$; $y=6, 3, 2\pm\sqrt{14}.i$; $z=3, 6, 2\mp\sqrt{14}.i$.

92. $x=\pm1$; $y=\pm5$; $z=\pm2$. **93.** $x=\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$; $z=\frac{1}{5}; \frac{1}{4}$.

94. $x=\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$; $y=\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$; $z=-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. **95.** $x=3, 3, 2, 2, 1, 1$;

*) Ука [illegible]

$y=1, 2, 3, 1, 2, 3$; $z=2, 1, 1, 3, 3, 2$. **96.** $x=5, 5, -2, -2, -3, -3$ $y=-3, -2, 5, -3, -2, 5$; $z=-2, -3, -3, 5, 5, -2$. **97.** $x=2, -7$ $y=5, 4$; $z=4, 5$; $u=3, 12$. **98.** $x=3, 17, 10\mp\sqrt{58}$; $y=5, -4$ $z=4, -5$; $u=\pm 7, \pm\sqrt{58}$. **99.** $x=10, 3$; $y=6, 5$; $z=5, 6$; $u=3, 10$ **100.** $x=3, 2$; $y=2, 3$; $z=6, 1$; $u=1, 6$. **101.** 5 и 6. **102.** 9 и 12 **103.** 14 и 8. **104.** 8 и 6 или —7 и—9. **105.** 24. **106.** 12 и 4. **107.** 1: и 36. **108.** 13 и 9. **109.** $\frac{3}{4}$ или $\frac{4}{3}$. **110.** 35 или 53. **111.** 36 и 30. **112.** 2: и 45. **113.** 80 раб. и 45 пуд.. **114.** 20 и 30, или 30 и 20. **115.** : и 3. **116.** 12 и 4. **117.** 5 и 6. **118.** 7 чет. по $3\frac{1}{2}$ руб. или 29 чет по $1\frac{13}{14}$ руб.. **119.** 80, 39, 89. **120.** 3, 4, 5. **121.** 20, 18, 16 **122.** 452. **123.** 3, 4, 12. **124.** 4, 6, 9. **125.** 40 ябл. по 3 коп и 60 ябл. по 2 коп.. **126.** 864. **127.** 2, 6, 9. **128.** 9, 5, 6, 2 **129.** 18, 9, 12, 6. **130.** 3762.

ОТДѢЛЕНIЕ XI.

§ .. **25.** $x>-\frac{1}{2}$. **26.** $x<-2$. **27.** $x>\frac{24}{25}$. **28.** $x>56$. **29.** $x<-\frac{4}{5}$. **30.** $x<-3\frac{1}{2}$. **31.** $x>8$. **32.** $x<1\frac{2}{3}$. **33.** $x>10\frac{2}{3}$. **34.** $x<2$. **35.** $x>-3\frac{2}{3}$. **36.** $x<-5$. **37.** $x>\frac{1}{2}$. **38.** $x>7\frac{1}{2}$. **39.** $x<\frac{4}{5}$ **40.** $x<\frac{1}{5}$. **41.** $x<-3$. **42.** $1<x<4$. **43.** $x>\frac{3}{2}$. **44.** $3<x<19$. **45.** Несовмѣстны. **46.** Несовмѣстны. **47.** $x>-2$. **48.** $-2<x<1$. **49.** $a<\frac{2}{3}$ или $a>\frac{3}{2}$. **50.** $2\frac{2}{3}<a<5$. **51.** $-3\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$. **52.** $\frac{2}{5}<a<2\frac{1}{3}$. **53.** $a<\frac{2}{7}$ или $a>2\frac{2}{3}$. **54.** $-1\frac{3}{5}<a<2\frac{1}{3}$.

61. $x \lessgtr -2$. **62.** $x>2$ или $x<-3$. **63.** $-2<x<5$. **64.** x произвольно. **65.** $x>\frac{2}{3}$ или $x<-\frac{1}{2}$. **66.** Невозможно. **67.** $x>5$ или $x<-3$. **68.** $-2\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}$. **69.** $x>3$ или $x<-3$. **70.** $x>\frac{2}{5}$ или $x<-\frac{2}{5}$.

§ 1. **71.** $a>2\frac{1}{2}$. **72.** $a<3$. **73.** $0<a<5$. **74.** $5<a<8$. **75.** $9>a>7$. **76.** $a<2\frac{2}{3}$ или $a>7\frac{1}{2}$. **83.** Невозможна. **84.** Невозможна. **85.** -50. **86.** Подлежитъ исправленію. **87.** Невозможна. **88.** Подлежитъ исправленію. **89.** Невозможна. **90.** Подлежитъ исправленію. **91.** 0. **92.** Невозможна. **93.** ∞. **94.** Невозможна. **95.** Невозможна. **96.** Невозможна. **97.** 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. **98.** Неопредѣленна. **99.** Всякое число. **100.** Неопредѣленна. **101.** 6. **102.** $\frac{1}{4}$. **103.** $-1\frac{1}{3}b$. **104.** $\frac{3a}{2}$. **105.** $\frac{4}{5}$. **106.** $\frac{7}{5}$. **107.** 0. **108.** ∞. **109.** $-\frac{1}{2}$. **110.** -1. **111.** $\frac{n\ \ m}{a-b}$. **112.** $\frac{a}{k}\ \frac{bk}{1}$. **113.** $\frac{ab}{b\ \ a}$. **114.** $\frac{an-bm}{m-n}$. **115.** $\frac{b-am}{m}$. **116.** $\frac{ad}{a-b}$. **117.** $\frac{a(q-n)}{m-n+q-p}$. **118.** $\frac{bc}{b-a}$. **119.** $\frac{ad}{a-b}$. **120.** $\frac{d-bm}{a-b}$.

§ 2. **121.** $a>3\frac{1}{3}$. **122.** $-4<a<3\frac{3}{4}$. **123.** $a--14$. **124.** $a-30$, $b=-\frac{4}{5}$. **125.** 5 и -2. **126.** -12 п -14. **127.** $\frac{0}{0}$. **128.** Уравненія несовмѣстны. **129.** $\frac{m(c-b)}{a-b}$, $\frac{m(a-c)}{a\ \ b}$. **130.** $\frac{ad-bc}{a-b}$, $\frac{d-c}{a-b}$.

§ . **131.** $a-3, 8, 15,\ldots$ **132.** $a=\frac{3}{2}, 4, 7\frac{1}{2},\ldots$ **133.** $a-1, 7, 13,\ldots$ **134.** $a=13,15,20,\ldots$ **135.** $0<b<\frac{a^2}{4}$. **136.** $b^2<a^2<2b^2$. **137.** $n>4m$. **138.** $d>\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **139.** $x<0$. **140.** $-1<x<3$.

§ 5. **165.** x 9, $y=1$. **166.** $x=9,16,\ldots$; $y=9,21,\ldots$ **167.** $x=6$, $y=3$. **168.** $x-4,53,\ldots$; $y=1,16,\ldots$ **169.** $x=25,60,\ldots$; $y=12, 30,\ldots$ **170.** x 2, $y-1$. **171.** $x=5$, 15, 25, 35, 45, 55; $y-51$, 42, 33, 24, 15, 6. **172.** $x=0$, 5, 10, 15, 20; $y=28$, 21, 14, 7, 0. **173.** $x=7$, $11,\ldots$; y 9, $24,\ldots$ **174.** $x=1$, $5,\ldots$; $y=1$, $16,\ldots$ **175.** $x=11$, y 3. **176.** x 14, $y=12$. **177.** $x=5$, $y=2$. **178.** $x=11$, $y=7$. **179.** x 23, y 21. **180.** $x=23$. $y=17$. **181.** $x=15, 30, 45,\ldots$ $y=5,11,17,\ldots$; z $3,7,11,\ldots$ **182.** $x=2$, $y=2$, $z=1$. **183.** $x=0$, 1, 2,

3; $y=7, 6, 5, 4$; $z=7, 5, 3, 1$. **184.** $x=7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$; $y=2, 3, 4$; 5, 6, 7, 8, 9; $z=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **185.** $x=18,73,....$; $y=3,14,...$, $z=1$, 6,.... **186.** $x=13,69,....$; $y=4,25.....$; $z=5,29,.....$ **187.** $x=2$, $y=3$, $z=4$. **188.** $x=34$, 27, 20, 13, 6; $y=22$, 26, 30, 34, 38; $z=5$, 11, 17, 23, 29. **189.** x 8, $y=0$, $z=1$, u 10. **190.** $x=8$, $y=3$, $z=5$, $u=1$. **191.** 70 и 130 или 161 и 39. **192.** Десятью способами. **193.** $136t-24$ и $136t-34$. **194.** Семь рѣшеній или безконечное число. **195.** 15 и 10, или 6 и 26. **196.** $\frac{1}{12}$ и $\frac{17}{24}$, или $\frac{2}{12}$ и $\frac{15}{24}$,..., или $\frac{9}{12}$ и $\frac{1}{24}$. **197.** 2 и 23, или 12 и 10. **198.** Числители первой 5, 8,.... а второй 2. 6,.... **199.** Въ отношеніи 3:4. **200.** 3:5. **201.** $5+24t$. **202.** $40t+25$. **203.** $-21-40t$. **204.** $17+21t$. **205.** 15 и 2, или 25 и 5, или 35 и 8. **206** 29 и 5, или 56 и 13, или 83 и 21. **207.** 175. **208.** 50 и 10. **209.** $1+3t$ и $1+5t$. **210.** Въ первомъ случаѣ числа оборотовъ относятся какъ 23:19, во второмъ рѣшенія 6, 29,.... и 5, 24,....; въ третьемъ рѣшенія 12, 35,.... и 10, 29, ... **211.** 6, 11 и 13. **212.** Перваго 18, 15 или 12; второго 3, 10 или 17. **213.** 974. **214.** 1, 79 и 40, или 24, 40, 56, или 47, 1 и 72. **215.** 394, 475, 556, 637 или 718. **216.** 58. **217.** $1320t+25$. **218.** 133. **219.** 4, 4, 1, или 1, 6, 1, или 3, 3, 2, или 6, 1, 2, или 2, 2, 3, или 1, 1, 4. **220.** Числители первой 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, второй 7, 4, 1, 5, 2, 3, 1, третьей 4, 8, 12, 4, 8, 4, 4.

ОТДѢЛЕНІЕ XII.

§ . **1.** 44 и 345. **2.** -37 и -360. **3.** 1065. **4.** 10100. **5.** $\frac{(n+1)a-(n-1)b}{2}n$. **6.** $2n-1$ и n^2. **7.** $d=3$. **8.** $d=-5$. **9.** $\frac{(3n+7)n}{2}$. **10.** $[a-b(n+1)]n$. **11.** $u=55$, $s=403$. **12.** $a_{11}=26$, $s_{11}=451$. **13.** $a=2$, $s=1661$. **14.** $a_1=56$, $s_{40}=680$. **15.** $r=5$, $n=18$. **16.** $d=-1$, $n=20$. **17.** $r=4$ и $s=528$. **18.** $d=-2$, $s_{15}=330$. **19.** $r=10$, $u=140$. **20.** $d=3$, $a_{31}=45$. **21.** $a=9$, $r=2$. **22.** $a_1=0$, $d=7$. **23.** $n=10$, s 265. **24.** $n=26$, $s_{26}=604,5$. **25.** $a=7$, $u=61$. **26.** $a_1=-9$, a_{25} 3 **27.** $n=10$, $u=47$. **28.** $n=52$, $a_{52}=143$. **29.** $n=10$, $a=2$.

30. $n=21$ или 24, $a_1=8$ или -4. **31.** $a-33$, $r\ \ -4$. **32.** 145
33. 4 или 9. **34.** 10, 8, 6,.... **35.** -10. **36.** $r=2$, $n=11$
37. 1, 3, 5. **38** $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$. **41.** 2, 5, 8 или 8, 5, 2
42. 2, 5, 8 или 14, 11, 8. **43** 13. **44.** 120 р., 9 м.. **45.** 6
46. 5 или 12. **47.** 8 или 9. **48.** 2. **49.** $\frac{1}{2}$.

§ 2. **51.** 10230. **52.** -13108. **53.** $\frac{1640}{729}$. **54.** $\frac{5}{2}+\frac{19}{12}\sqrt{6}$.

55. $\frac{8}{3}[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n]$. **56.** $\frac{\sqrt{6}[(\sqrt{3})^n-1]}{\sqrt{3}-1}$. **57.** 512. **58.** $\left(\frac{b}{a}\right)^{99}$. **59.** $q=3$.

60. $\sqrt{\frac{b}{a}}$. **61.** 189. **62.** $\frac{b}{a+b}\cdot[(-1)^n a^n b^{k-n}-b^k]$. **63.** $a-2$, $s\ \ 254$, $p\ \ 2^{28}$. **64.** $a_1-\frac{3}{8}$, $s_5-\frac{55}{216}$, $p_5-\frac{1}{6^5}$. **65.** $q-8$, $s\ \ 14043$, $p\ \ (192)^5$
66. $q=-\frac{2}{3}$, $s_6\ \ 44\frac{1}{3}$, $p_6-(27.32)^3$. **67.** $a-5$, $u-320$. **68.** $a_1=8$, $a_8=-\frac{1}{16}$. **69.** $n-6$, $s-189$, $p=3^6.2^{15}$. **70.** $n\ \ 6$, $s_6=24\frac{17}{27}$, $p_6-\frac{2^{15}}{3^3}$. **71.** $q-3$, $n-7$. **72.** $q-2, n=6$. **73.** $u\ \ 567$, $n=5$.
74. $a_6=-486$, $n-6$. **75.** $a-1$ или -6, $n\ \ 4$ или 3. **76.** a_1-2, $n-8$. **77.** $q-2$, $u-120$. **78.** $q--6$ или 5, $a_3=432$ или 300.
79. $q=-\frac{2}{3}$, $a\ \ 27$. **80.** $q=3$ или $-\frac{3}{4}$, a_1-15 или 240.

81. $q=\pm 3$, $\pm\sqrt{10}.i$. **82.** 3069. **83.** 27, -9, 3, -1, или 54, 18, 6, 2.
84. 64, 32, 16, 8, 4, 2. **85.** 2, 6, 18 или 18, 6, 2. **86.** 5, 13, 21, 29.
89. $a_m=\sqrt{kl}$, $a_n=k\sqrt[2n]{\left(\frac{l}{k}\right)^m}$. **90.** $\frac{na^{n+1}}{a-1}-\frac{a(a^n-1)}{(a-1)^2}$. **91.** 2. **92.** $\frac{3}{4}$.
93. $\frac{3}{2}\sqrt{6}$. **94.** $\frac{16+11\sqrt{2}}{7}$. **95.** Первый членъ произволенъ, а знаменатель равенъ $\frac{1}{1+k}$. **96.** $k-\frac{r(1-r^k)}{1-r}$. **97.** $\frac{1}{3}$AB. **98.** $4a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ и $2a^2$. **99.** $6a(2-\sqrt{3})$ и $\frac{1}{7}a^2\sqrt{3}$. **100.** $2\pi r^2$ и $4r^2$.

§ 3. **101.** $n(-1)^n$. **102.** $\frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4}$. **103.** $n+1-\frac{1}{2^n\ \ 1}$.
104. $\frac{3}{4}[1+(2n\ \ 1).3^n]$. **105.** $6-\frac{2n+3}{2^n\ \ 1}$. **106.** $5.[\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{n}{9}]$.
107. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **108.** $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$.
109 $\frac{1}{6}(n+1)(2n+3a\ \ 2)$ **110.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

ОТДѢЛЕНІЕ XIII.

§ 1. **21.** $\sqrt[4]{27}$. **22.** Приблизительно $\frac{3}{7}$. **23.** $\sqrt{5}$. **24.** Приблизительно 2,3. **25.** $\frac{1}{8}\sqrt[4]{8}$. **26.** $\frac{1}{7}\sqrt[3]{7}$. **28.** 3, 2, —4. **29.** $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{10}$. **30.** 4, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $4.\sqrt[4]{2}$. **31.** —4. **32.** $-\frac{6}{7}$. **33.** $-\frac{1}{2}$. **34.** 7. **35.** $2\frac{1}{2}$. **36.** $\frac{4}{5}$. **37.** $2\frac{1}{3}$. **38.** 4 или —1. **39.** ± 2. **40.** 2. **41.** 2. **42.** 3. **43.** 4. **44.** 0. **45.** 2 или 5. **46.** $\frac{1}{a+b}$. **47.** 1. **48.** 35. **49.** 1, —2 или 3. **50.** $\mathrm{Lg}_a(b\pm\sqrt{b^2-c^2})$. **67.** $2\mathrm{Lg}(a-b)+\mathrm{Lg}c-\mathrm{Lg}(a+b)-\mathrm{Lg}d$. **69.** $\frac{1}{5}(\mathrm{Lg}3+3\mathrm{Lg}a+\mathrm{Lg}b-4\mathrm{Lg}c)$. **72.** $-\mathrm{Lg}a-\frac{1}{n}\mathrm{Lg}b$. **74.** $\frac{1}{8}(6\mathrm{Lg}2+3\mathrm{Lg}3+\mathrm{Lg}5)$. **77.** $\frac{11}{21}(2\mathrm{Lg}2+\mathrm{Lg}3)$. **78.** 0. **79.** $2\mathrm{Lg}2-\mathrm{Lg}5+\frac{2}{3}\mathrm{Lg}a+\mathrm{Lg}\mathrm{Lg}a$. **80.** $\mathrm{Lg}\mathrm{Lg}(a+b)+\mathrm{Lg}\mathrm{Lg}(a-b)-\mathrm{Lg}2$. **81.** $4\frac{2}{3}$. **82.** 1125. **83.** $\frac{\sqrt[5]{11^3}}{\sqrt[7]{5^2}}$. **84.** $\frac{169}{7\sqrt{4\sqrt[3]{7}}}$. **85.** $\frac{a^3b^2}{c^4}$. **87.** $\frac{a+x}{a\sqrt[3]{ab\sqrt{b}}}$. **89.** $\frac{1}{a^3}\sqrt[3]{\frac{(a+b)\sqrt[5]{(a-b)^2}}{b\sqrt{c}}}$. **90.** $\sqrt[n]{\left(\frac{bz^2\sqrt[3]{b(a-2z)^2}}{a^2\sqrt[10]{a^7}}\right)^m}$. **91.** 1. **92.** 10 или $\frac{1}{10}$. **93.** 100 или $\frac{1}{10}$. **94.** 1, 0 или 4. **95.** 1000 или $\frac{1}{100}$. **96.** $\pm\sqrt{\lg 5}$. **97.** $3\frac{1}{3}$. **98.** a^{mn}. **99.** 1000. **100.** $\sqrt[n]{m}$.

§ 2. **111.** 7961,6. **112.** 401,74. **113.** 31. **114.** 41,846. **115.** 552,25. **116.** 0,000021952. **117.** 3,5355. **118.** 0,37325. **119.** 36,659. **120.** 0,18894. **121.** 1,4252. **122.** 0,7372. **123.** 5,5555. **124.** 0,13762. **125.** 50,466. **126.** 1,0471. **127.** 0,37077. **128.** 0,00068129. **129.** 4,8674. **130.** 1,0295. **131.** 74,87. **132.** 0,050188. **133.** 1,3631. **134.** 0,79668. **135.** 0,814. **136.** 93,832. **137.** 0,46763. **138.** 73,207. **139.** 0,15669. **140.** 1,2644. **141.** 1,7604. **142.** 2,30103. **143.** —5,1286. **144.** 1,7237. **145.** 0,54866. **146.** 2 или —1,585. **147.** Невозможна. **148.** 1,3713. **149.** —0,43683. **150.** 1,1899. **151.** 0,0188865. **152.** 0,146143. **153.** 1,24203. **154.** 0,90084. **155.** —25,3944. **156.** 21,55

157.—8094,66. **158.** 2,8946. **159.** 1,33496. **160.** 3,42838. **161.** 0,9937. **162.** 0,88396. **163.** 1,596. **164.** 0,88662. **165.** 0,537275. **166.**—0,88852. **167.** 0,093428. **168.** 0,85119. **169.** 1,16327 **170.** 2974,75. **171.** 4419,4. **172.** 1,0998. **173.** 0,62831. **174.** 0,1289. **175.** 6569,43. **176.** 1,0471. **177.** 142,62. **178.** $\frac{\lg u - \lg a}{\lg q} + 1$. **179.** 0,0171904. **180.** $\frac{2\lg p}{\lg a + \lg u}$. **181.** 2. **182.** —2. **183.** 18. **184.** 3 или —5. **185.** 3. **186.** 2. **187.** 25. **188.** $\frac{16}{\sqrt[3]{5}}$. **189.** 2,345. **190.** 1,8575. **191.** 16 и 10. **192.** 1000000 и 10. **193.** 1,6624 и 1,2745. **194.** $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. **195.** 4 и 2 или 9 и—3. **196.** $2\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. **197.** 2 и 4. **198.** 1 и 1 или 16 и 4. **199.** 3 и 5. **200.** 2 и 3.

§ 2. **201.** 363 р. 47 к.. **202.** 2493 р. 94 к.. **203.** 20. **204.** 4%. **205.** 5000. **206.** 7,18. **207.** 8304 р.. **208.** 22 г. 10 м. 12 дн.. **209.** $4\frac{1}{2}$%. **210.** 9. **211.** $\frac{aq(q^t-1)}{q-1}$. **212.** $aq^t + \frac{b(q^t-1)}{q-1}$. **213.** 2641 р. 40 к.. **214.** 103946. **215.** 356 р. 85 к.. **216.** 267 р. 86 к.. **217.** 10. **218.** 5. **219.** 17864 р. 10 к.. **220.** 14118 р. 60 к.. **221.** $Aq^t = \frac{a}{q-1}(q^t-1)$. **222.** 500. **223.** 3816 р. 20 к.. **224.** 10. **225.** 18 л. и 363 р.. **226.** $aq^{s+t} = \frac{b}{q-1}(q^t-1)$. **227.** 5994 р. 60 к.. **228.** 979 р. 82 к.. **229.** 30. **230.** 2629 р. 40 к..

ОТДѢЛЕНІЕ XIV.

§ 1. **1.** $x-3$. **2.** $2a+3$. **3.** $3(2x^2-3x+5)$. **4.** $a(2a-3x)$. **5.** a^3-2a^2b. **6.** $a^2(x+2a)$. **7.** $2a(2a^2-3a+1)$. **8.** $3ac^2(2a^2-3b^2)$. **9.** $x-a$. **10.** $(x-3)(x-a)$. **11.** $a-2b$. **12.** $3x-y$. **13.** $12a^4-20a^3+5a^2+5a-2$. **14.** $(4a^3+4a^2+3a+9)(a^2-4a+5)$. **15.** $(x^3-6x^2+11x-6)(x-4)$. **16.** $(a-b)(a^2b+3ab^2-3a^3-b^3)$. **17.** $2(3x+2)(6x^3+5x^2-23x+5)$. **18.** $(x+3y)(6x^3-5x^2y-27ay^2+5y^3)$. **19.** $(x^3-19x-30)(x^2+5x+10)$. **20.** $(x^3\ \ 7x\ \ 6)(3x-2)$.

§ 2. **35**. 24. **36**. 840. **37**. 3024. **38**. 45. **39**. 15. **40**. 6. **41**. 14 или 3 **42**. 7. **44**. 24; 6; 2. **45**. C_9^3; C_8^2. **46**. A_{11}^4; A_{10}^3. **47**. C_{n-h}^{k-h}. **48**. A_{n-h}^{k-h}.

49. $k<\frac{n+1}{2}$; $\frac{n-1}{2}$ или $\frac{n}{2}$.

§ 3. **63**. $126a^5b^4$. **64**. $-3432a^7b^7$. **65**. $C_{19}^8a^8x^{11}$ и $C_{19}^8a^{11}x^8$. **66**. $C_{24}^6a^6x$ и $C_{24}^6a^{18}x^{30}$. **67**. $84z^4$. **68**. $\frac{1120}{a^4}$. **69**. $715(1+z)^4(1-z)^2\sqrt{1+z}$. **70**. 792

§ 4. **75**. $\frac{a^3b^2+4a^2b+3a}{a^2b^2+3ab+1}$. **76**. $\frac{6x^3+5x}{6x^4+7x^2+1}$. **77**. $\frac{a^4+2a^2-a+1}{a^3+a^2+2a}$

78. $\frac{x^3-x^2-6x+8}{x^4-2x^3-4x^2+15x-13}$. **87**. $(a, a\ 1, a+1 a,)$. **88**. $(x-1, x+1, x-1, x+1)$. **89**. (0,1,1,1.2). **90**. (1,1,1,1,2,1,4). **91**. 0. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{29}$, $\frac{29}{70}$, $\frac{99}{239}$. **94**. 2, 3, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{87}{32}$, $\frac{106}{39}$, $\frac{193}{71}$, $\frac{1264}{465}$. **96**. 0, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{6}{83}$, $\frac{43}{595}$, $\frac{479}{6628}$. **101**. (1,2.2,. .). **102**. (1,1,2,1.2,...) **103**. (4,2,8,2,8,....). **104**. (2,1,1,1,4,1,1,1,4,...,). **105**. (4,2,1,3,1,2,8,2,1,3,1,2,8.....). **106**. (5,1,1,3,5,3,1,1,10,1,1,3,5,3,1,1,10.....). **107**. $(a, 2a, 2a.......)$. **108**. $(a, 1, 2a, 1, 2a,..)$. **109**. $[a-1, 1, 2(a-1), 1, 2(a-1),..]$. **110**. $[a-2, 1, 2(a-2), 1.2(a-2),..]$. **111**. $\sqrt{17}$. **112**. $\sqrt{15}$. **113**. $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$. **114**. $\sqrt{23}$. **115**. $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. **116**. $\sqrt{a^2+a}$. **117**. $5-13t$, $8t-3$. **118**. $14t-9$, $9t-6$. **119**. $14-16t$, $23t-20$. **120**. $11t+8$, $7t+5$. **121**. $34t-20$, $29-49t$. **122**. $19t+17$, $17t+14$. **123**. $22-34t$, $55t-35$. **124**. $344t+141$, $149t+61$. **125**. (1,2,2,1,1,2.2,....). **126**. (1,1,1,2,3,9,....). **127**. (2,10,1,1,....). **128**. (0,1,1,3,....).

§ 5. **131**. $\frac{4ac-b^2}{4a}$. **132**. $\frac{a}{2}$. **133**. Квадратъ. **134**. Квадратъ. **135**. Кубъ. **136**. Кубъ. **137**. Меньшій и большій изъ корней трехчлена $(n^2-4mp)z^2+[4(ap+cm)-2bn]z+b^2-4ac$. **138**. Наибольшее 6, наименьшее $3\frac{1}{2}$. **139**. Нѣтъ. **140**. Нѣтъ.

§ 6 **141**. $3x-5$. **143**. x^2-5x+2. **144**. Корень $2x^2-3$, остатокъ $6x^4-13x^2+9$. **145**. $\frac{5}{6x}-\frac{26}{15(x+3)}+\frac{9}{10(x-2)}$. **146**. $\frac{1}{3(1-x)}+\frac{2}{3(1+x)}+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+2)}$. **147**. $a^2=4(b+c)$. **148**. $(x-5y+2)(2x-3)$

149. $(a_2b—ab_2)(a_1c_2\ \ a_2c_1)—(a_2c—ac_2)(a_1l_2—a_2b_1)$. **150.** $(2x—3y)^2+$ $+(x+4y)^2$ или $(2x+\frac{7}{5}y)^2+(x—\frac{24}{5}y)^2$.

§ 3. **151.** $(2302)_5$. **152.** 935. **153.** $144a+12b+c$. **154.** 98. **155.** $3a^3+5a+2$; $a>5$. **156.** 9. **157.** $(14035)_8$; $(2241)_5$. **158.** $(1050)_9$; $(24)_{11}$. **159.** Кв. кор. 111, куб. кор. 101. **160.** (102); (14586).

ОБЩІЙ ОТДѢЛЪ.

1. $3x^2—13x+12—0$ и $4x^2—19x+12=0$. **2.** 40. **3.** 44 и 36 или 50 и 30. **4.** 30 и 24. **5.** $60x^4—304x^3+497x^2—304x+60=0$. **6.** 5 и 5. **7.** 5 и 33, или 10 и 26, или 15 и 19, или 20 и 12, или 25 и 5. **8.** 4 и 30, или 24 и 10, или 8 и 35, или 28 и 15. **9.** На 2 года по $4\frac{1}{2}\%$. **10.** Капиталы 2800 и 1200, или 1600 и 2400; проценты 4 и 6, или 7 и 3. **11.** 2 д., $2\frac{2}{3}$д. и $3\frac{1}{3}$д.. **12.** 17. **13.** 390 или —735. **14.** 61. **15.** 16, 12 и 9. **16.** Первая часть $10\frac{2}{3}$, послѣдняя $1041\frac{2}{3}$. **17.** 36, 162, 288 и т. д.. **18.** 273 и 16, или 161 и 128, или 49 и 240. **19.** 1 или $\frac{9}{16}$. **20.** 96, 144 и 216, или 392, 448 и 512. **21.** [illegible] **22.** [illegible]1 или 22. **23.** 2, 6 и 18. **24.** 1941. **25.** $1\frac{1}{2}$, $1[illegible]\frac{1}{2}$. **26.** 7. **27.** 17 и [illegible] или 0 и 5. **28.** 10 и 5, или 37 и 1. **29.** 108[illegible] и 1[illegible]10. **30.** [illegible] и [illegible] **31.** 5,5. **32.** 6264 р. 70 к.. **33.** 10 или 12. **34.** 8. **35.** На 7 лѣтъ по 5%. **36.** 27562 р. 50 к.. **37.** 196 и 84. **38.** 10, 12 и 1[illegible]. **39.** 8. **40.** 416 руб.. **41.** 9, 12, 16. **42.** 56. **43.** 1 и $1\frac{16}{31}$. **44.** $8008x^{[illegible]}$. **45.** 852. **46.** $x^3—x^2—34x—56$. **47.** 2048. **48.** 222 и 553. **49.** 7. **50.** 888 кв. с. 48 кв. ф.. **51.** 21 и 112, или 45 и 88, или 69 и 94, или 63 и 40, или 117 и 16. **52.** 135, 45 и 15. **53.** 1, 4, 7 и 10, или —10, —7, —4 и —1. **54.** 12, 18 и 27, или 27, 18 и 12. **55.** (4,1,3,1,8,1,3,1,8,....). **56.** (5,1,10,1,10,....). **57.** 5 и 8. **58.** 36 и 7, или 27 и 14, или 18 и 21, или 9 и 28. **59.** 11. **60.** 3135